

Die Wirkungsmacht des Zinseszinses: Wie Zeit, Wiederanlage und Zinsusancen das Endvermögen bestimmen

Roland Rupprechter¹

Abstract

Dieses Papier untersucht die ökonomische Funktion des Zinseszins effekts aus der Perspektive eines Privatanlegers. Ausgehend von der diskreten Verzinsung werden die unterjährige und die stetige Verzinsung über die Eulersche Zahl e formal hergeleitet, die international gebräuchlichen Zinsusancen (30/360, 30E/360, act/360, act/365, act/act) systematisiert, den vollständigen Formelapparat des Zeitwerts des Geldes (Endwert, Barwert, Zinssatz, Laufzeit, Renten und ewige Renten) formelbasiert entwickelt und die Wirkung der Wiederanlage auf Geldmarkt-, Anleihe- und Aktienanlagen anhand einheitlicher, hypothetischer Rechenbeispiele quantifiziert. Ergänzend werden die verhaltensökonomischen, psychologischen und neurobiologischen Grundlagen der systematischen Unterschätzung exponentiellen Wachstums (Exponential Growth Bias, Gegenwartsverzerrung), die Sparplanmathematik des Faktors Zeit sowie die empirische Evidenz zu Market Timing aufgearbeitet.

Die Ergebnisse verdeutlichen die dominante Rolle von Anlagehorizont und Wiederanlage. Bei einer Aktienanlage von 100.000 Euro mit einer Gesamtrendite von 7 Prozent pro Jahr erreicht ein thesaurierender Anleger nach 20 Jahren ein Endvermögen von 386.968 Euro, während ein Anleger, der die jährliche Ausschüttung von 2,5 Prozent konsumiert, einschließlich aller entnommenen Beträge nur 319.600 Euro erzielt — ein Rückstand von 21,1 Prozent. Bei einer zehnjährigen Kuponanleihe entfällt je nach Wiederanlagezins bis zu einem Viertel des gesamten Zinsertrags auf den Zins auf den Zins. Unter Unsicherheit dämpft die Volatilität das Kapitalwachstum gemäß $g \approx \mu - \sigma^2/2$ (Volatility Drag), während der Vermögensmultiplikator $(1+g)^T$ konvex im Anlagehorizont wächst. Die Verhaltensökonomie erklärt, warum der Effekt gleichwohl ungenutzt bleibt: Haushalte unterschätzen exponentielles Wachstum systematisch; der Übergang von

¹R&B Wealth Management Research; Member, Austrian Association for Financial Analysis and Asset Management

voller Verzerrung zu korrekter Wahrnehmung geht mit 55 bis 90 Prozent höherem Vermögen einher (Levy und Tasoff, 2016). Die Sparplanmathematik zeigt, dass der Horizont den Zinssatz als Hebel dominiert — die Elastizitäten des Endvermögens wachsen linear in T —, und die Timing-Evidenz, dass bereits das Verpassen der zehn besten Handelstage rund die Hälfte des Endvermögens kostet (Estrada, 2008), während sich Market Timing erst ab etwa 74 Prozent Prognosegenauigkeit lohnt (Sharpe, 1975).

Aus den Befunden folgt: Zeit im Markt, konsequente Wiederanlage, Kostenkontrolle und Kenntnis der Zinsusancen sind die wesentlichen Bestimmungsgrößen, mit denen Privatanleger die Wirkungsmacht des Zinseszinses für sich nutzen können. Das Papier versteht sich als didaktische Synthese der Literatur, nicht als Anlageempfehlung.

Keywords: Zinseszins · Thesaurierung · Cost-Average-Effekt · Zinsusancen · Volatility Drag · Anlagehorizont · Exponential Growth Bias · Market Timing.

JEL codes: D14, D91, E43, G11, G41, G51, G53.

Nicht-technische Zusammenfassung

Aus einer Kapitalanlage fließen Erträge — Zinsen, Kupons oder Dividenden. Werden diese Erträge nicht entnommen, sondern wieder angelegt, erwirtschaften sie künftig selbst Erträge. Dieser Zins auf den Zins ist der Zinseszinseffekt. Er wirkt anfangs unscheinbar, entfaltet über lange Zeiträume jedoch eine erhebliche Wirkung: Aus konstantem prozentualem Wachstum wird exponentielles Wachstum des Vermögens.²

Die Kernfrage dieser Arbeit lautet, wie groß dieser Effekt bei den gängigen Anlageformen tatsächlich ist und wovon er abhängt. Die Antwort in einfachen Worten: Er hängt vor allem von drei Größen ab — der Höhe der Rendite, der Länge des Anlagezeitraums und der Konsequenz, mit der Erträge wieder angelegt werden. Von diesen dreien ist die Zeit der stärkste Hebel, weil das Vermögen mit jedem zusätzlichen Jahr nicht gleichmäßig, sondern beschleunigt wächst.

Methodisch stellt die Arbeit die Berechnungsvarianten der Verzinsung vor — von der jährlichen über die monatliche bis zur sogenannten stetigen Verzinsung, die auf der Eulerschen Zahl e beruht — und erklärt die international unterschiedlichen Zählweisen für Zinstage (etwa 30/360 oder act/365), die je nach Land und Marktsegment zu unterschiedlichen Zinsbeträgen führen. Alle Aussagen werden an vollständig durchgerechneten, hypothetischen Beispielen festgemacht.

Das zentrale Beispiel vergleicht zwei Anleger über 20 Jahre: Beide investieren 100.000 Euro in dieselben Aktien mit 7 Prozent Gesamtrendite pro Jahr. Anleger A legt alle Ausschüttungen wieder an (er thesauriert), Anleger B lässt sich jährlich 2,5 Prozent auszahlen und konsumiert diese Beträge. Am Ende besitzt Anleger A rund 387.000 Euro; Anleger B kommt einschließlich aller ausgezahlten Beträge nur auf rund 320.000 Euro. Der Unterschied von gut 67.000 Euro oder 21 Prozent ist allein der Zinseszinseffekt der wieder angelegten Ausschüttungen.

Drei weitere Befunde runden das Bild ab. Erstens unterschätzen Menschen exponentielles Wachstum systematisch, weil das Denken linearen Mustern folgt — der Zinseszins wirkt deshalb am Anfang enttäuschend unscheinbar und überrascht erst in späten Jahren; diese Kenntnis stützt das Durchhalten. Zweitens schlägt die Zeit den Zinssatz: Ein früher Beginn mit kleinen Beträgen übertrifft einen späten Beginn mit großen Beträgen — im Beispiel erreicht eine Sparerin mit einem Drittel der Einzahlungen 96 Prozent des Endvermögens, nur weil sie zehn Jahre früher begonnen hat. Drittens ist Zeit im Markt wichtiger als der richtige Zeitpunkt: Das Verpassen allein der zehn ertragsstärksten Börsentage über Jahrzehnte kostet etwa die Hälfte des Endvermögens.

² Alle Zahlenbeispiele dieser Arbeit sind hypothetisch, vor Steuern und Kosten gerechnet und stellen keine Anlage-, Rechts- oder Steuerberatung dar.

Das praktische Fazit lautet: früh beginnen, Erträge wieder anlegen, Kosten niedrig halten und Schwankungen aushalten. Die Beachtung dieser vier Regeln erschließt die wirksamste Bestimmungsgröße des langfristigen Vermögensaufbaus: die Zeit.

Den Formelapparat dazu liefert der Zeitwert des Geldes: Mit wenigen Formeln lässt sich ausrechnen, was aus heutigem Geld künftig wird (Endwert), was künftiges Geld heute wert ist (Barwert), welche durchschnittliche Rendite zwischen zwei Vermögensständen liegt und wie lange eine Verdopplung dauert. Diese Arbeit stellt alle diese Formeln mit kurzen Erklärungen zusammen ; einmal nachvollzogen, erlauben sie es, jedes Sparprodukt, jeden Kredit und jede Renditeangabe selbständig überprüfen.

Wichtig ist schließlich die Reihenfolge der Bestimmungsgrößen: Am meisten bewirkt der frühe Beginn, danach kommen die Höhe der regelmäßigen Sparrate und die konsequente Wiederanlage, dann die Kosten des Produkts — und erst zuletzt die Jagd nach der höchsten Rendite. Diese Rangfolge ist beruhigend, denn die wichtigsten Hebel liegen vollständig in der eigenen Hand.

Inhalt

Nicht-technische Zusammenfassung	3
1 Einleitung	6
2 Berechnungsvarianten: von der einfachen Verzinsung zur Eulerschen Zahl	7
2.1 Einfache Verzinsung und diskreter Zinseszins	7
2.2 Unterjährige Verzinsung und der effektive Jahreszins	8
2.3 Stetige Verzinsung und die Eulersche Zahl	9
3 Der Zeitwert des Geldes: der Formelapparat des Zinseszinses	10
3.1 Die vier Grundgrößen: Endwert, Barwert, Zinssatz und Laufzeit	10
3.2 Renten, ewige Renten und der Barwert von Zahlungsströmen	12
3.3 Kapitalwert und interner Zinsfuß: Entscheidungsregeln des Zeitwerts	13
4 Zinsusancen im internationalen Vergleich	14
4.1 Systematik der Tageszählung	14
4.2 Ökonomische Wirkung der Usancen	15
5 Zinseszins bei Geldmarkt- und Anleiheprodukten	16
5.1 Geldmarkt: die Frequenz der Zinsgutschrift	16
5.2 Anleihen: Kupon-Wiederanlage und der Zins auf den Zins	17
5.3 Duration und Immunisierung: Preis- und Wiederanlagerisiko im Gleichgewicht ..	18
6 Zinseszins bei Aktien und Aktienfonds	19
6.1 Thesaurierung versus Ausschüttung: ein 20-Jahres-Vergleich	19
6.2 Ratierliches Ansparen und der Cost-Average-Effekt	20
7 Wachstum unter Unsicherheit: Volatility Drag und Zeithorizonteffekte	21
7.1 Arithmetisches und geometrisches Mittel: der Volatility Drag	21
7.2 Zeithorizonteffekte: die Konvexität der Zeit	23
8 Psychologie und Biologie des Zinseszinses: der Verzögerungs-Effekt	24
8.1 Exponential Growth Bias: Evidenz und Modellierung	24
8.2 Gegenwartsverzerrung, Neuroökonomie und Selbstbindung	25
9 Der Faktor Zeit schlägt den Zinssatz: die Mathematik des Sparplans	26
9.1 Endwertformeln und Sensitivitätsanalyse	26
9.2 Der frühe Sparbeginn: ein Zwei-Sparer-Experiment	28
10 Zeit im Markt schlägt Market Timing	28
10.1 Die Arithmetik des Timings	28
10.2 Empirische Evidenz zum Anlegerverhalten	29
11 Fazit und Handlungsempfehlungen	31
Literaturverzeichnis	33

1 Einleitung

Kaum ein Mechanismus der Finanzwirtschaft ist zugleich so einfach und so folgenreich wie der Zinseszins. Wird der Ertrag einer Kapitalanlage nicht entnommen, sondern dem Kapital zugeschlagen, so wächst das Vermögen nicht linear, sondern exponentiell: Der Ertrag von morgen wird auch auf dem Ertrag von heute verdient. Über kurze Zeiträume ist der Unterschied zwischen einfacher Verzinsung und Zinseszins gering; über Jahrzehnte entscheidet er über ein Vielfaches des Endvermögens. Gleichwohl zeigt die Haushaltsfinanzforschung regelmäßig, dass gerade dieses exponentielle Wachstum systematisch unterschätzt wird — ein Befund, der in der Literatur als Exponential Growth Bias bezeichnet wird.³

Historisch ist der Zins so alt wie die Schrift selbst: Verzinsliche Darlehen sind für Mesopotamien seit dem dritten Jahrtausend vor Christus belegt, und bereits der Codex Hammurapi regulierte Zinsobergrenzen (Homer und Sylla, 2005). Der Zinseszins wurde dabei früh als eigenständiger und in seiner Wirkung ambivalenter Mechanismus erkannt: Babylonische Tontafeln enthalten Aufgaben zur Verdopplungszeit verzinslichen Kapitals, mittelalterliche Kanonisten rangen mit dem Zinsverbot, und die kaufmännische Praxis der italienischen Stadtstaaten machte die Zinsrechnung zur Grundlage des modernen Kredit- und Kapitalmarktwesens. Die vorliegende Arbeit steht damit in einer langen Tradition der Verdeutlichung exponentiellen Kapitalwachstums — mit dem Unterschied, dass sie sich an den heutigen Privatanleger richtet.

Die formalen Grundlagen des Zinseszinses reichen weit zurück: Pacioli (1494) dokumentiert mit der 72er-Regel eine frühe Näherung für Verdopplungszeiten, Jacob Bernoulli stieß bei der Analyse der stetigen Verzinsung auf den Grenzwert von $(1 + 1/n)^n$, und Euler (1748) gab der so entstehenden Konstante e ihren Namen. Böhm-Bawerk (1889) begründete den Zins aus der Zeitpräferenz, Fisher (1930) verankerte ihn als Preis der Zeit in der ökonomischen Theorie, und Williams (1938) machte den Barwertkalkül zum Fundament der Wertpapierbewertung. Während die moderne Portfoliotheorie seit Markowitz (1952) Rendite und Risiko einperiodig betrachtet, rückten Kelly (1956), Latané (1959), Samuelson (1969) und Merton (1969) das Wachstum des Kapitals über viele Perioden in den Mittelpunkt. Messmore (1995) prägte für die Differenz zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel den Begriff des Variance Drain; Constantinides (1979), Statman (1995) und Dichev (2007) untersuchten die Eigenschaften ratierlichen Investierens. Stango und Zinman (2009) zeigen schließlich, dass Haushalte exponentielles Wachstum systematisch unterschätzen und deshalb zu wenig sparen.

Der Beitrag dieser Arbeit liegt in der didaktischen Synthese: Sie verbindet die formale Darstellung der Verzinsungsvarianten und Zinsusancen mit durchgerechneten,

³ Das häufig Albert Einstein zugeschriebene Diktum, der Zinseszins sei das achte Weltwunder, ist nicht belegt und gilt als apokryph; die Wirkung, die es beschreibt, ist gleichwohl real.

einheitlichen Beispielen für Geldmarkt-, Anleihe- und Aktienanlagen und quantifiziert die Wirkungsmacht des Zinseszinses dort, wo Privatanleger ihm tatsächlich begegnen: bei der Zinsgutschrift auf dem Tagesgeldkonto, der Wiederanlage von Kupons, der Wahl zwischen thesaurierenden und ausschüttenden Fonds sowie beim ratierlichen Ansparen. Alle Beispiele sind hypothetisch, vor Steuern und Kosten gerechnet und dienen ausschließlich der Illustration.

Methodisch versteht sich die Arbeit als normativ-didaktische Synthese: Sie leitet aus formaler Theorie und replizierter Evidenz Handlungsregeln ab, ohne eigene ökonometrische Schätzungen vorzulegen; wo empirische Größen zitiert werden, stammen sie aus den referenzierten Primärstudien. Der Abschnitt folgt der Tradition der Household-Finance-Literatur, die normative Benchmarks aus der Theorie gewinnt und beobachtetes Anlegerverhalten daran misst — die Lücke zwischen beidem ist der eigentliche Gegenstand der Abschnitte 8 bis 10.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Abschnitt 1 (der vorliegende Abschnitt) führt in die Fragestellung ein und ordnet die Literatur. Abschnitt 2 entwickelt die Berechnungsvarianten des Zinseszinses von der diskreten über die unterjährige bis zur stetigen Verzinsung auf Basis der Eulerschen Zahl. Abschnitt 3 stellt den vollständigen Formelapparat des Zeitwerts des Geldes vor — End- und Barwert, Zinssatz, Laufzeit, Renten und ewige Renten samt aller Formeln. Abschnitt 4 systematisiert die international gebräuchlichen Zinsusancen. Abschnitt 5 quantifiziert den Zinseszinsseffekt bei Geldmarkt- und Anleiheprodukten, Abschnitt 6 bei Aktien und Aktienfonds einschließlich Thesaurierung und Cost-Average-Effekt. Abschnitt 7 behandelt mit dem Volatility Drag und den Zeithorizonteffekten das Kapitalwachstum unter Unsicherheit. Abschnitt 8 wendet sich der Psychologie und Biologie des Zinseszinses zu — dem Exponential Growth Bias und der Gegenwartsverzerrung. Abschnitt 9 zeigt anhand der Sparplanmathematik, dass der Faktor Zeit den Zinssatz als Hebel dominiert, und Abschnitt 10 konfrontiert Market Timing mit der empirischen Evidenz. Abschnitt 11 fasst die Ergebnisse zusammen und leitet Handlungsempfehlungen ab.

2 Berechnungsvarianten: von der einfachen Verzinsung zur Eulerschen Zahl

2.1 Einfache Verzinsung und diskreter Zinseszins

Bei einfacher Verzinsung werden Zinsen stets nur auf das Anfangskapital K_0 gezahlt; das Vermögen wächst linear gemäß $K_T = K_0 \cdot (1 + i \cdot T)$. Beim Zinseszins wird der Zins dem Kapital zugeschlagen und in der Folgeperiode mitverzinst; das Vermögen wächst geometrisch gemäß $K_T = K_0 \cdot (1 + i)^T$. Der Unterschied ist anfangs klein und wächst dann beschleunigt: Bei einem Zinssatz von 4 Prozent erbringt die einfache Verzinsung nach zehn

Jahren 40,00 Prozent Gesamtertrag, der Zinseszins dagegen 48,02 Prozent — der Mehrertrag von gut 8 Prozentpunkten ist ausschließlich Zins auf den Zins.⁴

Aus der geometrischen Wachstumsgleichung folgt die Verdopplungszeit $T^* = \ln 2 / \ln(1 + i)$. Bei 6 Prozent verdoppelt sich das Kapital alle 11,9 Jahre, bei 2 Prozent erst alle 35,0 Jahre. Die als Näherungsregel verbreitete 72er-Regel ($T^* \approx 72 / \text{Zinssatz in Prozent}$) liefert mit 12,0 beziehungsweise 36,0 Jahren bemerkenswert genaue Näherungen.

Die zentrale Eigenschaft des Zinseszinses ist seine Konvexität in der Zeit: Jede weitere Periode erhöht das Endvermögen um einen größeren absoluten Betrag als die vorangegangene. Genau diese Eigenschaft wird von Anlegern unterschätzt (Stango und Zinman, 2009) und begründet, warum ein früher Anlagebeginn wirksamer ist als spätere Erhöhungen der Sparleistung.

Die Rechenregeln selbst sind älter als ihre theoretische Durchdringung: Schon die Zinstabellen der frühen Neuzeit — etwa in den Rechenbüchern, in deren Tradition Pacioli (1494) steht — dienten Kaufleuten dazu, Endwerte ohne wiederholte Multiplikation abzulesen (Homer und Sylla, 2005). Bemerkenswert ist zudem die Vorzeichensymmetrie des Mechanismus: Bei negativen Zinssätzen, wie sie der Euroraum zwischen 2014 und 2022 kannte, wirkt derselbe Exponent vermögensmindernd. Der Zinseszins wirkt vorzeichenneutral: Er verstärkt gleichermaßen Erträge, Kosten und Verluste.

Dieselbe Symmetrie gilt auf der Passivseite des Haushalts: Revolvierende Konsumkredite und Kreditkartensalden verzinsen sich nach identischer Mechanik gegen den Schuldner, häufig mit monatlicher Kapitalisierung und zweistelligen Effektivzinssätzen. Ein nicht getilgter Saldo verdoppelt sich bei 18 Prozent Effektivzins in rund vier Jahren — die 72er-Regel gilt für Schulden ebenso wie für Guthaben. Die erste Anwendung der Zinseszinsrechnung im Haushaltskontext ist deshalb nicht die Anlage-, sondern die Entschuldungsentscheidung: Kaum eine sichere Anlage erzielt die Rendite, die die Tilgung teurer Konsumkredite risikolos erbringt.

2.2 Unterjährige Verzinsung und der effektive Jahreszins

Werden Zinsen m -mal pro Jahr gutgeschrieben, lautet die Wachstumsgleichung $K_T = K_0 \cdot (1 + i/m)^{m \cdot T}$. Der nominelle Jahreszins i ist dann von dem effektiven Jahreszins $i_{\text{eff}} = (1 + i/m)^m - 1$ zu unterscheiden, der den unterjährigen Zinseszins einschließt und die maßgebliche Vergleichsgröße zwischen Angeboten mit unterschiedlicher Gutschriftfrequenz ist. Tabelle 1 zeigt den Effekt für eine Anlage von 10.000 Euro zu 4 Prozent Nominalzins über zehn Jahre.

⁴ Die 72er-Regel — Verdopplungszeit ≈ 72 dividiert durch den Zinssatz in Prozent — findet sich bereits bei Pacioli (1494); sie nähert die exakte Lösung $T^* = \ln 2 / \ln(1 + i)$ an.

Tabelle 1: Endwert von 10.000 Euro bei 4 Prozent Nominalzins über zehn Jahre nach Verzinsungsfrequenz

Verzinsung	Endwert (€)	Effektiver Jahreszins
jährlich ($m = 1$)	14.802,44	4,0000 %
halbjährlich ($m = 2$)	14.859,47	4,0400 %
vierteljährlich ($m = 4$)	14.888,64	4,0604 %
monatlich ($m = 12$)	14.908,33	4,0742 %
täglich ($m = 365$)	14.917,92	4,0808 %
stetig ($m \rightarrow \infty$)	14.918,25	4,0811 %

Quelle: Eigene Berechnungen; hypothetisches Beispiel vor Steuern und Kosten.

Tabelle 1 verdeutlicht zweierlei. Erstens erhöht jede Verdichtung der Zinsgutschrift das Endvermögen — der unterjährige Zinseszins ist real. Zweitens nimmt der Grenznutzen der Frequenz rasch ab: Zwischen jährlicher und stetiger Verzinsung liegen nach zehn Jahren nur 115,81 Euro oder 0,78 Prozent des Endwerts. Für das Endvermögen sind Rendite und Anlagedauer um Größenordnungen wichtiger als die Gutschriftfrequenz; gleichwohl gehört der Blick auf den effektiven Jahreszins zur Grundausrüstung des informierten Anlegers.

Die praktische Bedeutung des Effektivzinses ist auch regulatorisch verankert: Die europäische Verbraucherkreditrichtlinie und die deutsche Preisangabenverordnung verpflichten Anbieter zur Angabe des effektiven Jahreszinses, und der US-amerikanische Truth in Savings Act schreibt die Ausweisung des Annual Percentage Yield vor. Der Gesetzgeber kodifiziert damit exakt die Lehre der Beziehung $i_{\text{eff}} = (1 + i/m)^m - 1$: Ohne einheitliche Effektivzinsangabe wären Angebote mit unterschiedlicher Gutschriftfrequenz und Usance für Verbraucher systematisch unvergleichbar.

Der Frequenzeffekt skaliert dabei mit dem Zinsniveau: Die Differenz zwischen nominellem und effektivem Jahreszins wächst näherungsweise quadratisch im Zinssatz — bei 1 Prozent Nominalzins trennt jährliche von monatlicher Gutschrift weniger als ein halber Basispunkt, bei 12 Prozent (dem Bereich vieler Konsumkredite) bereits rund 68 Basispunkte. Der Unterschied ist damit gerade dort am größten, wo Haushalte am ehesten auf Nominalangaben treffen; dies ist ein weiteres Argument für die konsequente Effektivzinsbetrachtung.

2.3 Stetige Verzinsung und die Eulersche Zahl

Wächst die Zahl der Zinsgutschriften über alle Grenzen ($m \rightarrow \infty$), konvergiert $(1 + i/m)^m$ gegen e^i , wobei $e = \lim (1 + 1/n)^n = 2,71828\dots$ die Eulersche Zahl bezeichnet. Die stetige Verzinsung führt damit auf die elegante Wachstumsgleichung $K_T = K_0 \cdot e^{iT}$. Historisch ist die Eulersche Zahl unmittelbar aus der Frage nach dem Zinseszins hervorgegangen; sie ist im wörtlichen Sinne die Konstante des Zinseszinses.⁵

⁵ Der Grenzwert $\lim (1 + 1/n)^n$ wurde von Jacob Bernoulli 1683 bei der Untersuchung der stetigen Verzinsung gefunden; die Bezeichnung e geht auf Euler (1748) zurück.

Für die Finanzmathematik ist die stetige Betrachtung mehr als eine Kuriosität: Die stetige Rendite $r = \ln(1 + i)$ ist über die Zeit additiv, sodass sich Mehrperiodenrenditen als einfache Summen schreiben lassen. Auf dieser Eigenschaft beruhen die logarithmischen Renditen der empirischen Kapitalmarktforschung ebenso wie die zeitstetigen Modelle der Optionspreis- und Portfoliotheorie (Merton, 1969).

Für Privatanleger genügt die Erkenntnis, dass die stetige Verzinsung die obere Schranke des Frequenzeffekts markiert und zugleich den geeigneten Formelapparat für langfristiges Wachstum bereitstellt: Wachstumsraten addieren sich in logarithmischer Welt, und genau deshalb lassen sich Renditen, Kosten und Inflation über lange Horizonte am saubersten in stetiger Rechnung vergleichen.

Über die Anlagerechnung hinaus ist die stetige Verzinsung das Fundament der modernen Bewertungstheorie: Das Optionspreismodell von Black und Scholes (1973) diskontiert mit dem Faktor e^{-rT} , die Zinsstrukturmodelle der Fixed-Income-Analytik arbeiten durchgängig mit stetigen Kassazinssätzen, und in der empirischen Kapitalmarktforschung sind logarithmierte Renditen der Standard, weil sie zeitlich additiv und näherungsweise normalverteilt modellierbar sind. Die Eulersche Zahl verbindet damit die Zinsrechnung des Privatanlegers mit der Bewertungstechnik institutioneller Marktteilnehmer; beiden liegt derselbe mathematische Apparat zugrunde.

3 Der Zeitwert des Geldes: der Formelapparat des Zinseszinses

3.1 Die vier Grundgrößen: Endwert, Barwert, Zinssatz und Laufzeit

Der Zeitwert des Geldes (Time Value of Money) ist die zentrale Idee der Finanzwirtschaft: Ein Euro heute ist mehr wert als ein Euro morgen, weil er bis morgen verzinslich angelegt werden kann — und der Zinseszins ist der Mechanismus, der diesen Wertunterschied über die Zeit aufbaut. Böhm-Bawerk (1889) begründete den Zins aus der systematischen Höhererschätzung gegenwärtiger gegenüber künftigen Gütern, Fisher (1930) formalisierte ihn als Preis der Zeit. Der gesamte Formelapparat des Zeitwerts besteht aus vier Größen — Barwert PV (Present Value), Endwert FV (Future Value), Zinssatz i und Laufzeit n —, die durch eine einzige Gleichung verbunden sind; die folgenden Formeln sind lediglich Auflösungen dieser Gleichung nach jeweils einer anderen Unbekannten. Alle vier Formen sind damit äquivalent: Sie beschreiben denselben Zinseszinsmechanismus, einmal vorwärts und einmal rückwärts durch die Zeit gelesen.⁶

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n \quad (1)$$

⁶ Bereits Leonardo von Pisa (Fibonacci) löst im Liber Abaci von 1202 Barwertprobleme des Handelsverkehrs; Goetzmann (2004) sieht darin den Beginn der modernen Finanzmathematik.

Gleichung (1) ist die Endwertformel — die Grundgleichung des Zinseszinses: Ein heute angelegter Betrag PV wächst bei Zinssatz i über n Perioden auf den Endwert FV. Sie beantwortet die Frage, was aus dem heutigen Geld wird.

$$PV = FV / (1 + i)^n \quad (2)$$

Gleichung (2) ist die Barwertformel (Diskontierung) — dieselbe Gleichung, nach PV aufgelöst: Eine künftige Zahlung FV ist heute nur PV wert. Hier wirkt derselbe Mechanismus in umgekehrter Richtung, denn ferne Zahlungen verlieren durch die Diskontierung erheblich an heutigem Wert: 100.000 Euro in 30 Jahren sind bei 5 Prozent heute nur 23.138 Euro wert.

$$i = (FV / PV)^{1/n} - 1 \quad (3)$$

Gleichung (3) löst nach dem Zinssatz auf und liefert die durchschnittliche geometrische Jahresrendite (CAGR, Compound Annual Growth Rate) zwischen zwei Vermögensständen — die korrekte Kennzahl für den Vergleich von Anlagen über unterschiedlich lange Zeiträume.

$$n = \ln(FV / PV) / \ln(1 + i) \quad (4)$$

Gleichung (4) löst nach der Laufzeit auf: Wie lange dauert es, bis aus PV der Zielbetrag FV geworden ist? Für $FV/PV = 2$ ergibt sich die Verdopplungszeit aus Abschnitt 2, deren Näherungsregel die 72er-Regel ist.

Die vier Grundgrößen bilden ein geschlossenes System: Jede Anlageentscheidung — vom Tagesgeld über die Anleihe bis zur Aktie — ist implizit eine Anwendung der Gleichungen (1) bis (4), und jede der späteren Formeln dieser Arbeit, von der Rentenendwertformel des Sparplans bis zur Wachstumsrate $g \approx \mu - \sigma^2/2$, ist aus ihnen abgeleitet. Der Zinseszins ist der zugrunde liegende Mechanismus; der Zeitwert des Geldes ist sein Formelapparat.

Die Barwertlogik reicht dabei über Finanzanlagen hinaus: Auch das Humankapital eines Haushalts — der Barwert der erwarteten künftigen Arbeitseinkommen — ist eine Anwendung von Gleichung (2) und für junge Anleger regelmäßig der größte Vermögensposten. Aus dieser Perspektive erklärt sich auch die verbreitete Empfehlung, in jungen Jahren höhere Aktienquoten zu halten: Liegt der Großteil des Gesamtvermögens in anleiheähnlichem Humankapital, diversifizieren riskantere Finanzanlagen lediglich das Gesamtportfolio (Merton, 1969; Samuelson, 1969).

In der Marktpraxis tritt an die Stelle des einen Zinssatzes i eine ganze Zinsstrukturkurve: Für jede Fälligkeit t existiert ein eigener Kassazinssatz, und der Diskontfaktor $1/(1 + i_t)^t$ einer Zahlung ist der Preis einer Nullkuponanleihe dieser Laufzeit. Die Gleichungen dieses Abschnitts gelten unverändert — nur wird jede Zahlung mit dem Faktor ihrer eigenen Fälligkeit bewertet. Für den Privatanleger genügt die Einsicht, dass

der Markt für jeden Zeithorizont einen eigenen Preis der Zeit stellt und die Bewertung langlaufender Zahlungen deshalb besonders zinssensitiv ist.

3.2 Renten, ewige Renten und der Barwert von Zahlungsströmen

Reale Zahlungsströme bestehen selten aus einer einzigen Zahlung: Sparpläne, Kreditraten, Kupons und Dividenden sind Renten — Folgen gleich hoher periodischer Zahlungen R . Ihre End- und Barwerte entstehen durch Summation der geometrischen Reihe der Einzelzahlungen und bilden den Formelapparat hinter nahezu jedem Finanzprodukt:⁷

$$FV = R \cdot [(1 + i)^n - 1] / i \quad (5)$$

Gleichung (5) ist der Rentenendwert (nachsüssige Zahlung am Periodenende): der Endwert eines Sparplans mit konstanter Rate R — die Formel hinter Tabelle 8 und dem Zwei-Sparer-Experiment in Abschnitt 9.

$$FV = R \cdot [(1 + i)^n - 1] / i \cdot (1 + i) \quad (6)$$

Gleichung (6) ist der Rentenendwert bei vorschüssiger Zahlung (Rate am Periodenanfang): Jede Rate verzinst sich eine Periode länger — der zusätzliche Faktor $(1 + i)$ ist der Zinseszins genau dieses einen zusätzlichen Jahres.

$$PV = R \cdot [1 - (1 + i)^{-n}] / i \quad (7)$$

Gleichung (7) ist der Rentenbarwert: der heutige Wert von n künftigen Raten. Sie ist die Grundlage der Kredit- und Annuitätenrechnung — nach R aufgelöst liefert sie die Annuität eines Darlehens — und der Bewertung von Kuponanleihen.

$$PV = R / i \quad (8)$$

Gleichung (8) ist die ewige Rente (Perpetuität): der Barwert eines unendlichen, konstanten Zahlungsstroms. Dass unendlich viele Zahlungen einen endlichen heutigen Wert besitzen, verdeutlicht die Stärke der exponentiellen Diskontierung besonders klar.

$$PV = R / (i - g), \quad i > g \quad (9)$$

Gleichung (9) ist die wachsende ewige Rente (Gordon Growth Model): der Barwert eines mit der Rate g wachsenden Zahlungsstroms, etwa einer Dividende. Sie verdichtet die fundamentale Aktienbewertung nach Williams (1938) und Gordon und Shapiro (1956) auf eine einzige Zeile.

$$1 + r = (1 + i) / (1 + \pi) \quad (10)$$

⁷ Williams (1938) begründete mit dem Barwertkalkül die fundamentale Aktienbewertung; das Wachstumsmodell in Gleichung (9) wird nach Gordon und Shapiro (1956) als Gordon Growth Model bezeichnet.

Gleichung (10) ist die Fisher-Gleichung (Fisher, 1930): Sie zerlegt den Nominalzins i in den Realzins r und die Inflationsrate π . Für den langfristigen Vermögensaufbau ist allein der reale Zinseszins maßgeblich; Inflation wirkt als Zinseszins mit umgekehrtem Vorzeichen.

Damit schließt sich der Kreis zum Titel dieser Arbeit: Die Gleichungen (1) bis (10) sind zehn Lesarten derselben Kraft. Der Endwert zeigt die Wirkungsmacht des Zinseszinses als Verbündeten des geduldigen Sparers; der Barwert zeigt dieselbe Wirkung als Bewertungsmaßstab, der künftige Versprechen auf ihren heutigen Kern reduziert; und die Fisher-Gleichung erinnert daran, dass diese Wirkung real — nach Abzug der Inflation — verdient werden muss. Mit dem Formelapparat des Zeitwerts lassen sich jede Anlage, jeder Kredit und jede Ausschüttung in dieselbe Bezugsgröße umrechnen: heutige Euro.

Die Anwendungsbreite dieser Formeln ist beträchtlich: Gleichung (7) bepreist jeden Ratenkredit und jede Hypothek, Gleichung (8) den Rentenanspruch einer lebenslangen Auszahlung ebenso wie die Mieteinnahmen einer Immobilie, und Gleichung (9) trägt die Ausschüttungspolitik von Stiftungen und Universitätsvermögen, die aus einem wachsenden Kapitalstock eine dauerhaft konstante reale Entnahme finanzieren wollen. In jedem dieser Fälle entscheidet dieselbe Größe über Tragfähigkeit oder Auszehrung: das Verhältnis von Entnahmerate zu Wachstumsrate des Kapitals; der Zinseszins wirkt hier als Budgetrestriktion.

3.3 Kapitalwert und interner Zinsfuß: Entscheidungsregeln des Zeitwerts

Für Zahlungsströme mit ungleichen Zahlungen CF_t verallgemeinert der Kapitalwert (Net Present Value) das Barwertkalkül zur zentralen Entscheidungsregel der Investitionstheorie:⁸

$$NPV = \sum CF_t / (1 + i)^t, \quad t = 0, \dots, n \quad (11)$$

Gleichung (11) ist der Kapitalwert: die Summe aller mit dem Kalkulationszinssatz i diskontierten Ein- und Auszahlungen eines Projekts oder Wertpapiers. Die Entscheidungsregel lautet: Investitionen mit positivem NPV erhöhen das Vermögen, solche mit negativem mindern es — der Zinseszins des Kalkulationszinsses bildet den Maßstab, an dem jede Alternative zu messen ist.

$$0 = \sum CF_t / (1 + IRR)^t \quad (12)$$

Gleichung (12) definiert den internen Zinsfuß (Internal Rate of Return) als denjenigen Zinssatz, bei dem der Kapitalwert null wird — die im Zahlungsstrom implizit enthaltene

⁸ Nach dem Separationstheorem von Fisher (1930) und Hirshleifer (1958) sind Investitionsentscheidung und Konsumpräferenz trennbar: Am vollkommenen Kapitalmarkt ist die Maximierung des Kapitalwerts für jeden Anleger optimal — unabhängig von dessen Zeitpräferenz.

Verzinsung. Die Rendite auf Verfall einer Anleihe (Abschnitt 5) und die kapitalgewichtete Anlegerrendite bei Dichev (2007) sind Anwendungen dieses Konzepts.

Der interne Zinsfuß erfordert zugleich besondere Sorgfalt: Bei Zahlungsströmen mit mehrfachem Vorzeichenwechsel kann Gleichung (12) mehrere Lösungen besitzen, und die IRR-Regel unterstellt implizit die Wiederanlage aller Rückflüsse zum internen Zinsfuß selbst — eine Annahme, die Abschnitt 5.2 als Wiederanlagerisiko konkretisiert. Für Privatanleger folgt daraus eine einfache Prüfregel: Renditeangaben von Produkten mit komplexen Zahlungsprofilen sind stets daraufhin zu prüfen, welcher Wiederanlagezins ihnen zugrunde liegt. Wo Kapitalwert- und IRR-Regel in Konflikt geraten, gebührt dem Kapitalwert der Vorrang (Hirshleifer, 1958).

Zusammengenommen bilden die Gleichungen (1) bis (12) auch das Gerüst der fundamentalen Wertpapieranalyse: Das Discounted-Cash-Flow-Modell der Aktienbewertung ist nichts anderes als Gleichung (11), angewendet auf die erwarteten freien Zahlungsströme eines Unternehmens, und das Gordon Growth Model der Gleichung (9) ist ihr geschlossener Spezialfall. Aus der Wirkungsweise des Zinseszinses folgt zugleich, weshalb kleine Änderungen des Diskontierungszinses große Bewertungsänderungen auslösen: Die Konvexität der Barwertfunktion entspricht der Konvexität des Endwerts.

4 Zinsusancen im internationalen Vergleich

4.1 Systematik der Tageszählung

Zinsen werden für Bruchteile eines Jahres nach dem Zinsfaktor Zinstage/Basis berechnet. Wie Zinstage und Basis zu zählen sind, regeln Marktusancen, die sich historisch je Land und Marktsegment unterschiedlich entwickelt haben: Die Methode 30/360 (deutsche kaufmännische Zinsrechnung, US Bond Basis) unterstellt zwölf Monate zu 30 Tagen, die Eurobond-Variante 30E/360 behandelt Monatsultimos abweichend, act/360 zählt die tatsächlichen Tage auf eine 360-Tage-Basis, act/365 auf eine 365-Tage-Basis (gelegentlich auch als 30/365-Mischform anzutreffen), und act/act verwendet tatsächliche Tage im Zähler wie im Nenner.⁹

Die Zuordnung zu Marktsegmenten folgt festen Konventionen: Deutsche Bundesanleihen rechnen seit 1999 act/act (ICMA), US-Unternehmensanleihen überwiegend 30/360, der Euro-Geldmarkt einschließlich des Referenzzinssatzes €STR act/360, der Sterling-Geldmarkt act/365. Ein Vergleich von Anleihen oder Geldmarktprodukten über Ländergrenzen hinweg setzt daher die Korrektur der Usance voraus; andernfalls werden systematisch ungleiche Größen gegenübergestellt.

⁹ Die maßgeblichen Definitionen der Usancen finden sich in den 2006 ISDA Definitions sowie in Regel 251 der International Capital Market Association (ICMA).

Zur Tageszählung treten Geschäftstagskonventionen: Fällt ein Zahlungstermin auf ein Wochenende oder einen Feiertag, verschieben Regeln wie *Following* oder *Modified Following* die Zahlung auf den nächsten beziehungsweise — bei Monatswechsel — den vorhergehenden Geschäftstag, was Zinsperiode und Zinsbetrag erneut verändert. Auch Schaltjahre behandeln die Usancen unterschiedlich: *act/act* nach ISDA (2006) teilt die in ein Schaltjahr fallenden Tage durch 366, während die ICMA-Variante die tatsächlichen Tage der jeweiligen Kuponperiode ins Verhältnis setzt — im Detail können beide Methoden für dieselbe Periode abweichende Faktoren liefern.

Für die Praxis folgt daraus eine einfache Prüfroutine: Die maßgebliche Usance ist in den Emissionsbedingungen beziehungsweise im Termsheet eines Wertpapiers und in den Preisverzeichnissen von Einlagenprodukten ausgewiesen; sie gehört — neben Kupon, Fälligkeit und Zahlungsfrequenz — zu den vier Angaben, ohne die sich kein Zinsertrag nachrechnen lässt. Die Überprüfung von Stückzinsen, Festgeldabrechnungen oder Fondserträgen beginnt daher stets mit der Bestimmung der Zählweise; alle weiteren Rechenschritte folgen dann mechanisch aus den Formeln des Abschnitts 3.

4.2 Ökonomische Wirkung der Usancen

Die ökonomische Wirkung der Tageszählung zeigt Tabelle 2 für eine Halbjahresperiode vom 31. Januar bis zum 31. Juli 2026 (181 tatsächliche Tage) bei einer Nominalen von 1.000.000 Euro und einem Kupon von 5 Prozent.

Tabelle 2: Stückzinsen für eine Halbjahresperiode nach Zinsusance (Nominale 1.000.000 Euro, Kupon 5 Prozent, 31. Januar bis 31. Juli 2026)

Usance	Zinstage	Zinsfaktor	Zinsbetrag (€)
30/360	180	0,500000	25.000,00
30E/360	180	0,500000	25.000,00
act/360	181	0,502778	25.138,89
act/365	181	0,495890	24.794,52
act/act (ISDA)	181	0,495890	24.794,52

Quelle: Eigene Berechnungen; hypothetisches Beispiel vor Steuern und Kosten.

Zwischen der günstigsten und der ungünstigsten Zählweise liegen 344,37 Euro oder rund 1,4 Prozent des Zinsbetrags — allein durch die Konvention, ohne dass sich Kupon oder Periode ändern. Institutionell ist das bei großen Nominalen unmittelbar ergebniswirksam; Privatanleger begegnen dem Effekt bei Stückzinsen, Festgeldern und Geldmarktfonds sowie überall dort, wo nominelle Zinssätze unterschiedlicher Usancen verglichen werden. Da der Zinseszins auf gutgeschriebenen Zinsen aufsetzt, setzen sich Usancenunterschiede über lange Horizonte multiplikativ fort; die zutreffende Vergleichsgröße ist stets der effektive Jahreszins auf einheitlicher Basis.

Eine verwandte Fehlerquelle sind Quotierungskonventionen: Geldmarktpapiere wie US-Treasury Bills werden auf Diskontbasis notiert, deren Satz systematisch unter der

tatsächlichen Anlagerendite liegt, und Sätze auf act/360-Basis erscheinen optisch niedriger als äquivalente Sätze auf act/365-Basis. Ein Vergleich von Renditen über Marktsegmente hinweg erfordert daher neben der Tageszählung auch die Vereinheitlichung der Quotierungsbasis — andernfalls wird die Wirkungsmacht des Zinseszinses an der falschen Stelle gesucht: in scheinbaren Renditeunterschieden, die reine Konventionsartefakte sind.

Historisch erklären sich die 360er-Basen aus der Rechenpraxis: Ein Jahr zu zwölf Monaten à 30 Tagen erlaubte in der vormaschinellen Buchhaltung glatte Divisionen und geht letztlich auf das babylonische Sexagesimalsystem zurück (Homer und Sylla, 2005). Dass diese Konventionen die Elektronisierung der Märkte überdauert haben, belegt institutionelle Pfadabhängigkeit und begründet, weshalb jeder internationale Renditevergleich mit der Bestimmung der Tageszählung zu beginnen hat.

5 Zinseszins bei Geldmarkt- und Anleiheprodukten

5.1 Geldmarkt: die Frequenz der Zinsgutschrift

Bei Tagesgeld, Festgeld und Geldmarktfonds tritt der Zinseszins in seiner reinsten Form auf, weil Erträge regelmäßig gutgeschrieben und automatisch mitverzinst werden. Maßgeblich ist die Gutschriftfrequenz: Ein Tagesgeldkonto mit 3 Prozent Nominalzins und monatlicher Gutschrift erzielt einen effektiven Jahreszins von 3,04 Prozent; bei jährlicher Gutschrift bleibt es bei 3,00 Prozent. Geldmarktfonds thesaurieren die täglich anfallenden Erträge im Anteilspreis und realisieren den unterjährigen Zinseszins damit vollständig.¹⁰

Über kurze Zeiträume ist der Effekt bescheiden, über Jahre jedoch sichtbar — und er wirkt auch beim Rollieren von Festgeldern: Werden Zins und Kapital am Laufzeitende vollständig wieder angelegt, verzinsen sich künftig auch die erhaltenen Zinsen; wird dagegen nur das Kapital prolongiert und werden die Zinsen auf dem Girokonto belassen, unterbricht dies die Zinseszinskette an ihrer wirkungsvollsten Stelle, dem Anfang.

Auch das Vorzeichenregime prägt die Wirkung: In der Negativzinsphase des Euroraums von 2014 bis 2022 kehrte sich der Mechanismus um — Verwahrentgelte wirkten als negativer Zinseszins, und Geldmarktanlagen verloren nominal wie real an Wert. Ökonomisch maßgeblich ist für den Geldmarkt daher weniger die Höhe des Nominalzinses als der reale, um Inflation bereinigte Effektivzins nach Gleichung (10); über lange Zeiträume war dieser für Geldmarktanlagen historisch häufig nahe null oder negativ (Dimson, Marsh und Staunton, 2002).

¹⁰ Der Euro-Referenzzinssatz €STR wird — wie der Euro-Geldmarkt insgesamt — auf Basis act/360 quotiert.

5.2 Anleihen: Kupon-Wiederanlage und der Zins auf den Zins

Bei Kuponanleihen entsteht der Zinseszins nicht automatisch: Die Kupons fließen dem Anleger zu und müssen aktiv wieder angelegt werden. Der Endwert der Kupons folgt der Rentenendwertformel $FV = C \cdot ((1 + r)^T - 1)/r$, wobei C den Kupon und r den Wiederanlagezins bezeichnet. Tabelle 3 zerlegt den Kuponendwert einer zehnjährigen Anleihe (Nominale 100.000 Euro, Kupon 4 Prozent) in die Summe der Kupons und den Zins auf den Zins.¹¹

Tabelle 3: Endwert der Kupons einer zehnjährigen Anleihe (Nominale 100.000 Euro, Kupon 4 Prozent) in Abhängigkeit vom Wiederanlagezins

Wiederanlagezins	Endwert der Kupons (€)	davon Zins auf Zins (€)	Gesamtvermögen (€)
0 %	40.000,00	0,00	140.000,00
2 %	43.798,88	3.798,88	143.798,88
4 %	48.024,43	8.024,43	148.024,43
6 %	52.723,18	12.723,18	152.723,18

Quelle: Eigene Berechnungen; hypothetisches Beispiel vor Steuern und Kosten.

Bei einem Wiederanlagezins von 4 Prozent stammen 8.024 Euro oder 16,7 Prozent des Kuponendwerts aus dem Zins auf den Zins; bei 6 Prozent sind es bereits 24,1 Prozent — annähernd ein Viertel des gesamten Zinsertrags. Zugleich zeigt die Tabelle das Wiederanlagerisiko: Unterbleibt die Wiederanlage ($r = 0$), gehen bis zu 12.723 Euro verloren. Nullkuponanleihen (Zerobonds) und thesaurierende Renten- und Geldmarktfonds lösen dieses Problem konstruktiv, indem sie die Wiederanlage in das Produkt verlagern — der Zerobond entspricht ökonomisch einem verbrieften Zinseszins zum bei Kauf fixierten Zins.

Die Größenordnung des Zins-auf-Zins-Anteils wächst mit Laufzeit und Zinsniveau dramatisch: Homer und Leibowitz (1972) zeigen in ihrer klassischen Analyse, dass bei langlaufenden Anleihen und höheren Zinsniveaus der Zins auf den Zins mehr als die Hälfte des gesamten Ertrags einer bis zur Fälligkeit gehaltenen Anleihe ausmachen kann — ein Befund, der das Wiederanlagerisiko zur zentralen Ertragskomponente des Rentenportfolios macht. Die als konservativ geltende Kuponanleihe ist über lange Horizonte damit wesentlich von den künftigen Wiederanlagezinsen abhängig.

¹¹ Die Rendite auf Verfall (Yield to Maturity) unterstellt implizit, dass sämtliche Kupons bis zur Fälligkeit zum internen Zinssatz wieder angelegt werden; fällt der Wiederanlagezins, wird die ausgewiesene Rendite verfehlt (Wiederanlagerisiko).

5.3 Duration und Immunisierung: Preis- und Wiederanlagerisiko im Gleichgewicht

Kupon-Wiederanlage und Kursrisiko einer Anleihe sind zwei Seiten derselben Zinssensitivität, und ihr Gleichgewichtspunkt lässt sich exakt bestimmen. Die von Macaulay (1938) eingeführte Duration ist die barwertgewichtete mittlere Bindungsdauer der Zahlungen einer Anleihe:¹²

$$D = [\sum t \cdot CF_t / (1 + i)^t] / P \quad (13)$$

Gleichung (13) ist die Macaulay-Duration: der barwertgewichtete Durchschnitt der Zahlungszeitpunkte einer Anleihe mit Kurs P. Für die zehnjährige 4-Prozent-Anleihe aus Tabelle 3 beträgt sie 8,44 Jahre — deutlich weniger als die Restlaufzeit, weil die Kupons Kapital vorzeitig zurückführen.

$$\Delta P / P \approx - D / (1 + i) \cdot \Delta i \quad (14)$$

Gleichung (14) übersetzt die Duration in die Preissensitivität (modifizierte Duration $D/(1+i)$): Steigt der Zins um einen Prozentpunkt, fällt der Anleihekurs näherungsweise um $D/(1+i)$ Prozent — im Beispiel um rund 8,1 Prozent.

$$\Delta P / P \approx - D / (1 + i) \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \cdot C \cdot (\Delta i)^2 \quad (15)$$

Gleichung (15) ergänzt die lineare Näherung um die Konvexität C, die zweite Ableitung der Preis-Zins-Funktion: Weil der Barwert konvex im Zins ist, fallen Kurse bei Zinsanstiegen weniger und steigen bei Zinsrückgängen stärker, als die Duration allein anzeigt. Die Konvexität ist damit — wie der Zinseszins selbst — eine Folge des exponentiellen Diskontierungsfaktors.

Die anlagepraktische Konsequenz ist die Immunisierung: Steigende Zinsen senken den Kurs, erhöhen aber zugleich den Wiederanlageertrag der Kupons — am Anlagehorizont, der der Duration entspricht, gleichen sich beide Effekte näherungsweise aus (Fisher und Weil, 1971). Wird der Anlagehorizont an der Duration des Anleiheportfolios ausgerichtet, gleichen sich der Zinseszins der Wiederanlage und das Kursrisiko in Stellung gebracht: Das Endvermögen wird gegenüber Zinsänderungen in erster Ordnung unempfindlich. Damit liefert die Durationsrechnung die anlehenspezifische Antwort auf die Leitfrage dieser Arbeit — wie sich die Wirkungsmacht des Zinseszinses planbar vereinnahmen lässt.

Praktisch setzen Privatanleger die Immunisierungsidee mit einfachen Mitteln um: Eine Anleihenleiter (Laddering) verteilt Fälligkeiten gleichmäßig über die Jahre, sodass laufend Kapital zum jeweils aktuellen Zins wieder angelegt wird und die durchschnittliche Duration

¹² Der Durationsbegriff geht auf Macaulay (1938) zurück; die Immunisierungseigenschaft formalisierten Fisher und Weil (1971).

näherungsweise konstant bleibt; Laufzeitfonds mit fester Endfälligkeit bündeln denselben Mechanismus in einem Produkt. Beide Ansätze verwandeln das Zinsänderungsrisiko in einen planbaren Wiederanlagepfad — der Zinseszins wird vom Störfaktor zur Konstruktionsgröße.

6 Zinseszins bei Aktien und Aktienfonds

6.1 Thesaurierung versus Ausschüttung: ein 20-Jahres-Vergleich

Bei Aktien und Aktienfonds übernimmt die Wiederanlage von Dividenden die Rolle der Zinsgutschrift. Das folgende Beispiel isoliert ihren Beitrag: Zwei Anleger investieren je 100.000 Euro in dasselbe Aktienportfolio mit einer Gesamtrendite von 7 Prozent pro Jahr, die sich aus 4,5 Prozent Kurssteigerung und 2,5 Prozent Ausschüttung zusammensetzt. Anleger A legt alle Ausschüttungen unmittelbar wieder an (Thesaurierung); Anleger B lässt sich die Ausschüttung jährlich auszahlen und konsumiert sie. Tabelle 4 stellt die Vermögenspositionen nach 20 Jahren gegenüber.¹³

Tabelle 4: Thesaurierung versus Ausschüttung über 20 Jahre (Anfangskapital 100.000 Euro, Gesamtrendite 7 Prozent p. a., davon 2,5 Prozent Ausschüttung)

Position	Anleger A (thesaurierend)	Anleger B (ausschüttend)
Depotwert nach 20 Jahren	386.968,45	241.171,40
Konsumierte Ausschüttungen (nominal)	—	78.428,56
Gesamtvermögen einschließlich Entnahmen	386.968,45	319.599,96
Rückstand gegenüber Thesaurierung	—	67.368,49 (21,1 %)

Quelle: Eigene Berechnungen; hypothetisches Beispiel vor Steuern und Kosten.

Obwohl Anleger B sämtliche Ausschüttungen erhält und nichts verliert, bleibt sein Gesamtvermögen um 67.368 Euro oder 21,1 Prozent hinter dem des Thesaurierers zurück. Die Differenz ist reiner Zinseszins: Jede konsumierte Dividende verzichtet auf alle Erträge, die sie bis zum Horizont noch erwirtschaftet hätte — eine im ersten Jahr entnommene Ausschüttung von 2.500 Euro wäre bis zum Jahr 20 auf 9.041 Euro angewachsen. In der Fondsanlage bilden thesaurierende Anteilsklassen diesen Mechanismus automatisch ab; bei ausschüttenden Klassen muss der Anleger die Wiederanlage selbst organisieren und trägt dabei Transaktionskosten und Verhaltensrisiken.

Die langfristige Evidenz unterstreicht das Gewicht der Ausschüttungskomponente: Über Zeiträume von mehreren Jahrzehnten stammt ein erheblicher Teil des realen Gesamtertrags von Aktienmärkten aus reinvestierten Dividenden und nicht aus Kurssteigerungen (Siegel, 2002; Dimson, Marsh und Staunton, 2002). Dividend-

¹³ In Deutschland und Österreich mindern Abgeltung- beziehungsweise Kapitalertragsteuer (in Deutschland zudem die Vorabpauschale) den Effekt; die Vorteilhaftigkeit früher Wiederanlage bleibt dem Grunde nach bestehen.

Reinvestment-Programme und thesaurierende Indexfonds institutionalisieren diese Erkenntnis, indem sie die Wiederanlage dem Automatismus statt der Disziplin überlassen.

Die Steuerstundung der Thesaurierung lässt sich beziffern: Wird der jährliche Ertrag laufend mit dem Satz s besteuert, wächst das Kapital mit $(1 + i \cdot (1 - s))^T$; wird erst der Endwert besteuert, verbleibt $(1 + i)^T \cdot (1 - s) + s$. Bei 7 Prozent Rendite, 30 Jahren und einem Steuersatz von 26,375 Prozent liefert die nachgelagerte Besteuerung je Euro Einsatz 5,87 Euro, die laufende nur 4,52 Euro — ein Vorsprung von rund 30 Prozent allein aus dem Zinseszins der gestundeten Steuer. Reale Steuerregime liegen zwischen beiden Polen; die Richtung des Effekts ist davon unberührt.

Dass Anleger Ausschüttungen dennoch schätzen, erklärt die Verhaltensökonomie mit mentaler Buchführung: Dividenden werden als konsumierbares Einkommen verbucht, Kursgewinne als unantastbares Kapital — eine Trennung, die ökonomisch unbegründet ist, aber reale Konsum- und Wiederanlageentscheidungen prägt (Shefrin und Statman, 1984). Für den langfristigen Vermögensaufbau ist diese Präferenz teuer: Sie systematisiert genau die Entnahme, deren Opportunitätskosten Tabelle 4 beziffert.

6.2 Ratierliches Ansparen und der Cost-Average-Effekt

Beim Ansparen per Sparplan trifft der Zinseszins auf einen zweiten Mechanismus, den Cost-Average-Effekt: Bei regelmäßiger Investition eines festen Betrags werden zu niedrigen Kursen mehr und zu hohen Kursen weniger Anteile erworben. Der durchschnittliche Kaufkurs entspricht dann dem harmonischen Mittel der Kurse und liegt damit mathematisch stets unter deren arithmetischem Mittel. Tabelle 5 illustriert dies für einen Sparplan von 300 Euro monatlich über sechs Monate mit schwankenden Kursen.¹⁴

Tabelle 5: Cost-Average-Effekt bei einem Sparplan von 300 Euro monatlich über sechs Monate

Monat	Kurs (€)	Erworbene Anteile
1	50,00	6,000
2	40,00	7,500
3	32,00	9,375
4	40,00	7,500
5	50,00	6,000
6	60,00	5,000
Summe / Durchschnitt	45,33	41,375

Quelle: Eigene Berechnungen; hypothetisches Beispiel vor Steuern und Kosten.

Der durchschnittliche Kaufkurs beträgt $1.800/41,375 = 43,50$ Euro und liegt unter dem arithmetischen Kursdurchschnitt von 45,33 Euro. Die Einordnung verlangt allerdings Nüchternheit: Constantinides (1979) zeigt, dass ratierliches Investieren einer sofortigen Einmalanlage im Erwartungswert unterlegen ist, wenn Kapital bereits vorhanden ist;

¹⁴ Dichev (2007) zeigt, dass kapitalgewichtete Anlegerrenditen historisch hinter zeitgewichteten Indexrenditen zurückbleiben — Timing-Verhalten kostet Rendite.

Statman (1995) begründet seine Popularität verhaltensökonomisch. Für den typischen Ansparer, dessen Kapital erst mit dem Einkommen entsteht, ist der Sparplan gleichwohl das natürliche Vehikel — und der Zinseszins gewichtet seine Raten: Die frühen Raten arbeiten am längsten und tragen am meisten zum Endvermögen bei, was den frühen Beginn abermals zur wichtigsten Einzelentscheidung macht.

Der Umfang des Kaufkursvorteils hängt an der Volatilität: Die Differenz zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel wächst näherungsweise proportional zur Varianz der Kaufkurse — in ruhigen Märkten ist der Effekt gering, in volatilen spürbar. Das ändert nichts an der Einordnung als Disziplinierungs- statt Renditeinstrument, erklärt aber, weshalb der Sparplan gerade in turbulenten Phasen verhaltensstabilisierend wirkt: Er übersetzt Kursrückgänge mechanisch in höhere Stückzahlen und entzieht stimmungsgetriebenen Entscheidungen die Grundlage.

Die normative Einordnung sollte zudem die Alternative benennen: Für den Anleger mit vorhandenem Kapital ist die relevante Wahl nicht Sparplan oder nichts, sondern gestaffelter oder sofortiger Einstieg — und hier spricht der Erwartungswert für den sofortigen, weil das Kapital im Durchschnitt länger investiert ist (Constantinides, 1979). Für den Anleger ohne Anfangskapital stellt sich die Frage nicht: Sein Sparplan ist keine Timing-Entscheidung, sondern die einzig mögliche Abbildung seines Einkommenspfades in Vermögen. Die verbreitete Vermengung beider Situationen erklärt einen erheblichen Teil der Kontroverse um den Cost-Average-Effekt.

7 Wachstum unter Unsicherheit: Volatility Drag und Zeithorizonteffekte

7.1 Arithmetisches und geometrisches Mittel: der Volatility Drag

Unter Unsicherheit wächst Kapital nicht mit der durchschnittlichen (arithmetischen) Rendite μ , sondern mit der geometrischen Rate g . Das kanonische Beispiel: Auf +50 Prozent folgt –50 Prozent; das arithmetische Mittel beträgt null, doch aus 1 Euro werden $1,50 \cdot 0,50 = 0,75$ Euro. Für lognormale Renditen gilt näherungsweise $g \approx \mu - \sigma^2/2$: Die halbe Varianz wird dem Wachstum entzogen (Volatility Drag). Da der Zinseszins multiplikativ wirkt, mindern Schwankungen das Wachstum: Verluste erfordern überproportionale Gewinne, um ausgeglichen zu werden.¹⁵

Dieselbe Logik trägt die wachstumsoptimale Portfoliotheorie: Kelly (1956) und Latané (1959) zeigen, dass die Maximierung der erwarteten logarithmischen Rendite $E[\ln(1+R)]$ das langfristige Kapitalwachstum maximiert; im zeitstetigen Modell von Merton (1969) ist

¹⁵ Der Begriff Variance Drain geht auf Messmore (1995) zurück. Bei lognormalverteilterm Endvermögen ist der Median gleich $\exp(T \cdot (\ln(1+\mu) - \sigma^2/2))$; der Erwartungswert liegt darüber, wird aber nur von wenigen Pfaden erreicht.

der wachstumsoptimale Anteil riskanter Anlagen $f^* = (\mu - r_f)/\sigma^2$, also unmittelbar eine Funktion des Verhältnisses von Überschussrendite zu Varianz.

Wesentlich ist dabei die Unterscheidung von Erwartungswert und Median: Bei lognormalverteiltem Endvermögen liegt der Erwartungswert wegen der Rechtsschiefe der Verteilung über dem Median und wird nur von einer Minderheit der Pfade erreicht — der typische (mediane) Anleger erlebt das Wachstum mit der Rate g , nicht mit μ . Prognosen auf Basis arithmetischer Durchschnittsrenditen überzeichnen das wahrscheinliche Endvermögen daher systematisch, und die Differenz wächst mit Varianz und Horizont. Der Drag weist zugleich eine positive Entsprechung auf:

$$R_{div} \approx (\sigma^2 - \sigma_P^2) / 2 \quad (16)$$

Gleichung (16) ist die Diversifikations- beziehungsweise Rebalancing-Rendite (Fernholz und Shay, 1982; Booth und Fama, 1992): Die geometrische Rendite eines regelmäßig rebalancierten Portfolios übersteigt den gewichteten Durchschnitt der geometrischen Einzelrenditen näherungsweise um die halbe Differenz zwischen der durchschnittlichen Einzelvarianz σ^2 und der Portfoliovarianz σ_P^2 . Bei Einzeltiteln mit 25 und einem Portfolio mit 15 Prozent Volatilität sind das rund 2 Prozentpunkte pro Jahr — Diversifikation erhöht die geometrische Wachstumsrate, ohne die erwartete Einzelrendite zu verändern. Tabelle 6 quantifiziert den Volatility Drag für eine arithmetische Rendite von 7 Prozent über 20 Jahre.

Tabelle 6: Volatility Drag über 20 Jahre (Anfangskapital 100.000 Euro, arithmetische Rendite 7 Prozent p. a.)

Volatilität σ	$g \approx \mu - \sigma^2/2$	Endvermögen $(1+g)^{20}$ (€)	Median lognormal (€)
0 %	7,00 %	386.968,4	386.968,45
10 %	6,50 %	352.364,5	350.143,53
20 %	5,00 %	265.329,7	259.392,71
30 %	2,50 %	163.861,6	157.329,63

Quelle: Eigene Berechnungen; hypothetisches Beispiel vor Steuern und Kosten.

Bei 20 Prozent Volatilität kostet der Drag über 20 Jahre mehr als 120.000 Euro gegenüber dem schwankungsfreien Pfad — Volatilität ist damit ein unmittelbarer Kostenfaktor des Zinseszinses. Daraus folgt eine häufig übersehene Begründung der Diversifikation: Eine Senkung der Volatilität bei gleichem μ erhöht die geometrische Wachstumsrate g und damit das erwartbare Endvermögen. Diszipliniertes Rebalancing wirkt in dieselbe Richtung, indem es die Portfoliovarianz kontrolliert.

Auf Einzeltitelebene ist der Drag noch drastischer: Da Einzelaktien Volatilitäten von 30 Prozent und mehr aufweisen, ist ihre geometrische Rendite trotz positiver arithmetischer Erwartung häufig negativ — die Mehrheit der US-Aktien blieb historisch hinter Treasury Bills zurück, während wenige extreme Gewinner die Indexrendite trugen (Bessembinder, 2018). Das Indexportfolio erntet die Schiefe dieser Verteilung, das konzentrierte Depot

wettet gegen sie; der Volatility Drag ist damit das quantitative Argument, Diversifikation nicht als Renditeverzicht, sondern als Wachstumsbedingung zu begreifen.

7.2 Zeithorizonteffekte: die Konvexität der Zeit

Der Vermögensmultiplikator $(1+g)^T$ ist konvex im Horizont T: Gleiche Zeitspannen am Ende des Anlagelebens erzeugen absolut größere Zuwächse als am Anfang. Tabelle 7 zeigt Multiplikatoren und Verdopplungszeiten für Wachstumsraten zwischen 2 und 8 Prozent.¹⁶

Tabelle 7: Vermögensmultiplikatoren $(1+g)^T$ und Verdopplungszeiten

Wachstumsrate g	10 Jahre	20 Jahre	30 Jahre	40 Jahre	Verdopplungszeit (Jahre)
2 %	1,22	1,49	1,81	2,21	35,0
4 %	1,48	2,19	3,24	4,80	17,7
6 %	1,79	3,21	5,74	10,29	11,9
8 %	2,16	4,66	10,06	21,72	9,0

Quelle: Eigene Berechnungen; hypothetisches Beispiel vor Steuern und Kosten.

Bei 6 Prozent verzehnfacht sich das Kapital über 40 Jahre nahezu; von der Verzehnfachung entfällt gut die Hälfte auf die letzten zehn Jahre. Ein um zehn Jahre späterer Beginn kostet damit ökonomisch nicht das erste, sondern das letzte und ertragreichste Jahrzehnt. Zugleich ist Sorgfalt geboten: Der Horizont ersetzt keine Risikotragfähigkeit, denn mit der Zeit wächst auch die Streuung der möglichen Endvermögen (Samuelson, 1963). Die praktische Lehre der Zeithorizonteffekte bleibt davon unberührt: Der frühe Beginn dominiert als Entscheidungsvariable jedes Markttiming, da er den steilsten Abschnitt der Zinseszinskurve erschließt.

Die internationale Langfristevidenz stützt die Horizontperspektive: In der Jahrhundertbilanz von Dimson, Marsh und Staunton (2002) erzielten Aktien in allen 16 untersuchten Ländern höhere reale Renditen als Anleihen und Geldmarktanlagen — bei erheblichen Schwankungen im Zeitablauf und deutlichen Unterschieden zwischen den Ländern. Zugleich mahnen die Autoren, historische Renditen nicht unbesehen fortzuschreiben: Der Zeiteffekt wirkt auf die tatsächlich realisierte, nicht auf die erwartete Wachstumsrate.

Präzise formuliert verändert der Horizont die Gestalt des Risikos, nicht seine Existenz: Mit wachsendem T sinkt zwar die Wahrscheinlichkeit, hinter der sicheren Anlage zurückzubleiben, doch das Ausmaß möglicher Fehlbeträge wächst — weshalb der Preis einer Absicherung des Endvermögens mit dem Horizont steigt statt fällt (Bodie, 1995). Ein langer Horizont rechtfertigt damit kein beliebiges Risiko, sondern ist die Voraussetzung

¹⁶ Samuelson (1963) wendet gegen die sogenannte Zeitdiversifikation ein, dass sich Risiken über die Zeit nicht ausgleichen: Die Streuung des Endvermögens wächst mit dem Horizont.

dafür, dass die positive Wachstumsrate g ihre konvexe Wirkung entfalten kann; Risikotragfähigkeit und Horizont sind komplementäre, keine substituierbaren Ressourcen.

8 Psychologie und Biologie des Zinseszinses: der Verzögerungs-Effekt

8.1 Exponential Growth Bias: Evidenz und Modellierung

Der Zinseszins wirkt am Anfang unscheinbar — die Kurve verläuft flach — und entfaltet den größten Teil seiner Wirkung erst in späten Jahren. Genau diese Gestalt kollidiert mit der menschlichen Intuition. Die kognitive Psychologie dokumentiert seit den 1970er-Jahren, dass Menschen exponentielles Wachstum notorisch unterschätzen und stattdessen linear extrapolieren: Wagenaar und Sagaria (1975) zeigen, dass intuitive Fortschreibungen exponentieller Reihen dramatisch zu niedrig ausfallen, und Wagenaar und Timmers (1979) belegen, dass zusätzliche Datenpunkte die Schätzungen paradoxerweise nicht verbessern. Christandl und Fetchenhauer (2009) finden die Verzerrung auch bei Experten — sie ist mithin kein Bildungs-, sondern ein Wahrnehmungsphänomen.¹⁷

Formal lässt sich die Verzerrung in Anlehnung an Levy und Tasoff (2016) als Konvexkombination aus linear wahrgenommenem und tatsächlichem exponentiellem Wachstum darstellen: $\tilde{V}(i, T) = K_0 \cdot [(1 - \alpha) \cdot (1 + i \cdot T) + \alpha \cdot (1 + i)^T]$ mit $\alpha \in [0, 1]$, wobei $\alpha = 1$ korrekter Zinseszinsrechnung und $\alpha = 0$ vollständig linearem Denken entspricht. Der Wahrnehmungsfehler wächst mit dem Horizont: Bei 7 Prozent über 30 Jahre beträgt der wahre Endwert das 7,6-Fache des Einsatzes, der linear geschätzte nur das 3,1-Fache — der voll verzerrte Anleger unterschätzt sein Endvermögen um rund 59 Prozent, und die Unterschätzung wächst mit jedem weiteren Jahr.

Die ökonomischen Konsequenzen sind erheblich. Stango und Zinman (2009) zeigen, dass stärker verzerrte Haushalte weniger sparen und sich teurer verschulden. Levy und Tasoff (2016) schätzen in einer repräsentativen US-Stichprobe rund ein Drittel der Bevölkerung als vollständig verzerrt und beziffern den Übergang von voller Verzerrung zu korrekter Wahrnehmung *ceteris paribus* mit 55 bis 90 Prozent höherem akkumuliertem Vermögen. Almenberg und Gerdes (2012) verbinden den Bias mit geringer Financial Literacy; Foltice und Langer (2018) dokumentieren ihn selbst bei Studierenden mit finanzwirtschaftlicher Ausbildung. Der flache Anfang der Zinseszinskurve ist damit nicht nur ein Darstellungsproblem, sondern verhaltensrelevant: Die Wirkung tritt erst in einer Phase ein, in der die Sparentscheidung bereits gefestigt sein müsste.

Die Verzerrung ist bemerkenswert robust gegenüber Expertise und lässt sich zugleich gezielt adressieren: McKenzie und Liersch (2011) zeigen, dass selbst MBA-Studierende das

¹⁷ In den Experimenten von Wagenaar und Sagaria (1975) lagen die intuitiven Schätzungen von bis zu zwei Dritteln der Probanden unter 10 Prozent des korrekten Werts.

Wachstum von Altersvorsorgevermögen weitgehend linear fortschreiben — dass aber die grafische Darstellung des exponentiellen Verlaufs die Sparabsicht signifikant erhöht. Für die Anlegerkommunikation folgt daraus eine konkrete Gestaltungsempfehlung: Endvermögensrechner und Wachstumskurven sind keine Marketinginstrumente, sondern Korrekturlinsen für einen dokumentierten Wahrnehmungsfehler.

Wie folgenreich lineares Denken über exponentielle Prozesse ist, hat zuletzt die COVID-19-Pandemie demonstriert: Lammers, Crusius und Gast (2020) zeigen, dass Menschen das Wachstum der Fallzahlen massiv unterschätzten und dass die Korrektur dieser Fehlwahrnehmung die Unterstützung von Schutzmaßnahmen erhöhte. Der Befund ist strukturell identisch mit dem Sparproblem — dieselbe Kognition, dieselbe Unterschätzung, dieselbe Korrigierbarkeit — und belegt, dass der Exponential Growth Bias kein Spezifikum der Finanzdomäne ist, sondern eine allgemeine Eigenschaft menschlicher Intuition.

8.2 Gegenwartverzerrung, Neuroökonomie und Selbstbindung

Zur Fehlwahrnehmung des Wachstums tritt eine zweite, motivationale Hürde: die Gegenwartverzerrung. In der quasi-hyperbolischen Diskontierung von Laibson (1997) bewertet ein Entscheider den Nutzenstrom gemäß $U_t = u(c_t) + \beta \cdot \sum \delta^k \cdot u(c_{t+k})$ mit $\beta < 1$: Sämtliche künftigen Perioden werden gegenüber der Gegenwart zusätzlich pauschal abgewertet, was dynamische Inkonsistenz erzeugt — der für morgen geplante Sparbeginn wird heute abermals verschoben (Frederick, Loewenstein und O'Donoghue, 2002). Der Zinseszins verlangt genau die Geduld, die diese Präferenzstruktur systematisch untergräbt: Seine Belohnung liegt in der fernen, stark diskontierten Zukunft, seine Kosten — der Konsumverzicht — liegen in der Gegenwart.¹⁸

Die Neuroökonomie liefert die biologische Fundierung: McClure, Laibson, Loewenstein und Cohen (2004) zeigen, dass unmittelbar verfügbare Belohnungen das evolutionär alte limbische System aktivieren, während das Abwägen verzögerter Belohnungen dem jüngeren präfrontalen Kortex obliegt. In der Terminologie von Kahneman (2011) trifft beim Zinseszins das schnelle, intuitive System 1 auf eine Aufgabe, die das langsame, rechnende System 2 erfordert. Evolutionär ist das plausibel: In der Umwelt, in der sich das menschliche Gehirn entwickelte, wuchs kaum etwas exponentiell über Jahrzehnte — lineare Heuristiken waren hinreichend, und für Belohnungen in vierzig Jahren gab es keinen Selektionsdruck.

Aus dem Befund folgt die Konsequenz: Wenn Wahrnehmung und Selbstdisziplin systematisch versagen, sind automatisierte Verfahren erforderlich. Thaler und Benartzi (2004) zeigen mit dem Programm Save More Tomorrow, dass die Kopplung automatischer

¹⁸ McClure et al. (2004) zeigen mittels funktioneller Magnetresonanztomographie, dass unmittelbare Belohnungen vor allem limbische Strukturen aktivieren, während verzögerte Belohnungen mit präfrontaler und parietaler Aktivität einhergehen.

Sparerhöhungen an künftige Gehaltssteigerungen die Sparquote der Teilnehmer binnen 40 Monaten von 3,5 auf 13,6 Prozent hob. Der automatisierte Sparplan, die thesaurierende Anteilsklasse und der Dauerauftrag sind ökonomisch nichts anderes als Selbstbindungstechnologien, die den Zinseszins vor der eigenen Psychologie in Schutz nehmen.

Eine dritte Verhaltenshürde betrifft das Durchhalten: Benartzi und Thaler (1995) erklären die historisch hohe Aktienrisikoprämie mit myopischer Verlustaversion — der Kombination aus enger Rahmung und häufiger Depotbewertung. Bei täglicher Prüfung des Portfolios treten Verluste fast so häufig auf wie Gewinne und gewichtet sie nach der Prospekttheorie etwa doppelt so stark; bei seltener Prüfung überwiegen die beobachteten Zuwächse. Für den Zinseszins ist die Bewertungsfrequenz damit eine Verhaltensvariable erster Ordnung: Lange Bewertungsintervalle stützen genau die Haltedauern, die Abschnitt 10 als entscheidend ausweist.

Die wirksamste Selbstbindung setzt schließlich vor der Entscheidung an: Madrian und Shea (2001) zeigen, dass die bloße Umstellung der Voreinstellung — automatische Teilnahme am Altersvorsorgeplan mit Widerspruchsrecht statt aktiver Anmeldung — die Teilnahmequote neuer Beschäftigter von rund der Hälfte auf über 85 Prozent hob. Trägheit, die den Sparbeginn andernfalls verhindert, wirkt unter geänderten Voreinstellungen zugunsten des Zinseszinses: Die Gestaltung der Entscheidungssituation tritt an die Stelle der Selbstdisziplin.

9 Der Faktor Zeit schlägt den Zinssatz: die Mathematik des Sparplans

9.1 Endwertformeln und Sensitivitätsanalyse

Für die Einmalanlage gilt $FV = K_0 \cdot (1 + i)^T$; für den Sparplan mit nachschüssiger Rate R über n Perioden mit Periodenzins i folgt der Endwert der Rentenendwertformel $FV = R \cdot ((1 + i)^n - 1) / i$. Die Sensitivitäten beider Formeln lassen sich über Elastizitäten präzise vergleichen: Für die Einmalanlage ist $\partial \ln FV / \partial \ln(1 + i) = T$ und $\partial \ln FV / \partial \ln T = T \cdot \ln(1 + i)$ — beide Sensitivitäten wachsen linear im Horizont T . Die Zeit ist damit der einzige Parameter, der die Wirkung aller übrigen multipliziert: Ein längerer Horizont erhöht nicht nur den Exponenten, sondern auch die Empfindlichkeit des Endvermögens gegenüber jedem einzelnen Renditepunkt.¹⁹

Ein Zahlenvergleich macht die Rangfolge greifbar: 10.000 Euro wachsen bei 5 Prozent über 20 Jahre auf 26.533 Euro. Bei einer Verdopplung des Zinssatzes auf 10 Prozent entstehen 67.275 Euro; bei einer Verdopplung der Laufzeit auf 40 Jahre dagegen 70.400

¹⁹ Gerechnet wird mit nachschüssigen Monatsraten und einem effektiven Jahreszins von 5 Prozent; der äquivalente Monatszins beträgt $i_m = 1,05^{1/12} - 1 = 0,4074$ Prozent.

Euro. Die Verdopplung der Zeit schlägt die Verdopplung des Zinssatzes — und sie ist, anders als die Rendite, eine Variable, die der Anleger selbst kontrolliert. Die Rangfolge der drei Bestimmungsgrößen des Sparplans folgt derselben Logik: Eine Verdopplung der Sparrate verdoppelt das Endvermögen exakt (die Rate geht linear ein), eine Verdopplung des Zinssatzes wirkt über den Exponenten stärker als proportional, und eine Verdopplung der Laufzeit dominiert bei üblichen Parametern beide — mit dem zusätzlichen Vorzug, dass sie weder Konsumverzicht noch Risikoerhöhung verlangt, sondern lediglich einen früheren Beginn.

$$FV = R \cdot [(1 + i)^n - (1 + g)^n] / (i - g) \quad (17)$$

Gleichung (17) ist der Endwert der wachsenden Rente: der Sparplan, dessen Rate R mit der Rate g pro Periode steigt — etwa im Gleichschritt mit Lohnwachstum oder Inflation. Sie verbindet die Sparplanmathematik mit der Selbstbindungsstrategie automatischer Sparerhöhungen (Thaler und Benartzi, 2004) und hält die reale Sparleistung konstant, während eine rein nominale Rate an Kaufkraft verliert. Tabelle 8 zeigt, wie selbst kleine konstante Monatsraten über Jahrzehnte zu großen Vermögen anwachsen.

Tabelle 8: Endwerte monatlicher Sparraten bei 5 Prozent effektivem Jahreszins

Monatsrate (€)	10 Jahre (€)	20 Jahre (€)	30 Jahre (€)	40 Jahre (€)
100	15.436,32	40.580,45	81.537,59	148.252,46
200	30.872,63	81.160,90	163.075,18	296.504,92
300	46.308,95	121.741,35	244.612,77	444.757,38
Einzahlungen (je 100 EUR Rate)	12.000,00	24.000,00	36.000,00	48.000,00

Quelle: Eigene Berechnungen; hypothetisches Beispiel vor Steuern und Kosten.

Bei 100 Euro Monatsrate stehen nach 40 Jahren 148.252 Euro einer Einzahlungssumme von nur 48.000 Euro gegenüber: Gut zwei Drittel des Endvermögens sind Erträge und Erträge auf Erträge. Auffällig ist die Nichtlinearität in der Zeit: Das vierte Jahrzehnt allein steuert 66.715 Euro bei — fast so viel wie die ersten drei Jahrzehnte zusammen (81.538 Euro), obwohl in ihm nur ein Viertel der Raten fließt. Eine vorzeitige Beendigung des Sparplans entfernt damit nicht einen beliebigen, sondern den ertragreichsten Abschnitt der Kurve.

Der Vollständigkeit halber ist der Zeiteffekt real zu betrachten: Nach der Fisher-Gleichung (10) wächst reales Vermögen mit dem realen Zins. Bei 6 Prozent nominal und 2 Prozent Inflation steigt das Kapital über 40 Jahre nominal auf das 10,3-Fache, real jedoch nur um den Faktor 4,66 — noch immer eindrucksvoll, aber eine andere Größenordnung. Sparziele, die in heutiger Kaufkraft formuliert sind, sind daher mit realen Wachstumsraten zu rechnen; die Wirkungsmacht des Zinseszinses ist real zu erzielen und nicht allein nominal auszuweisen.

9.2 Der frühe Sparbeginn: ein Zwei-Sparer-Experiment

Wie stark die frühen Jahre wiegen, zeigt ein klassisches Gedankenexperiment. Anlegerin A spart vom 25. bis zum 35. Lebensjahr monatlich 200 Euro und stellt die Einzahlungen dann vollständig ein; Anleger B beginnt mit 35 und spart dieselben 200 Euro monatlich dreißig Jahre lang bis 65. A zahlt 24.000 Euro ein, B mit 72.000 Euro das Dreifache. Tabelle 9 zeigt das Ergebnis bei 6 Prozent Jahresrendite.²⁰

Tabelle 9: Früher versus später Sparbeginn (Monatsrate 200 Euro, 6 Prozent effektiver Jahreszins)

Größe	Anlegerin A (25 bis 35)	Anleger B (35 bis 65)
Summe der Einzahlungen	24.000,00	72.000,00
Depotwert mit 35	32.494,69	—
Endvermögen mit 65	186.632,96	194.902,59
Endvermögen je Euro Einzahlung	7,78	2,71

Quelle: Eigene Berechnungen; hypothetisches Beispiel vor Steuern und Kosten.

Mit einem Drittel der Einzahlungen erreicht A 96 Prozent des Endvermögens von B: Jeder Euro der Anlegerin A wächst auf 7,78 Euro, jeder Euro des Anlegers B nur auf 2,71 Euro. Die zehn frühen Jahre ersetzen dreißig späte fast vollständig, weil das mit 35 vorhandene Kapital von 32.495 Euro drei Jahrzehnte ununterbrochenen Zinseszinses vor sich hat. Kleine Beträge in frühen Jahren übertreffen damit große Beträge in späten Jahren; der Beginn selbst ist die wirksamste Einzelentscheidung des Anlegerlebens.

Das Experiment verbindet sich mit der Selbstbindungslogik aus Abschnitt 8: Eine automatische Anpassung der Sparrate an das Einkommen (Thaler und Benartzi, 2004) verbindet den Zeiteffekt der frühen Jahre mit einem wachsenden Ratenpfad und begegnet zugleich der Gegenwartsverzerrung, die den frühen Beginn in der Praxis am häufigsten verhindert.

10 Zeit im Markt schlägt Market Timing

10.1 Die Arithmetik des Timings

Die Zeit ist die wirksamste Bestimmungsgröße des Zinseszinses; ihre Wirkung wird durch Unterbrechung am stärksten beeinträchtigt. Market Timing — der Versuch, Abschwünge zu meiden und Aufschwünge mitzunehmen — greift in die Verkettung der Wachstumsfaktoren $FV = K_0 \cdot \prod (1 + r_t)$ ein: Bei fehlender Investition in Periode t tritt an die Stelle des Faktors $(1 + r_t)$ der Wert 1. Da Aktienerträge stark konzentriert anfallen, ist der Erwartungswert dieses Eingriffs negativ. Sharpe (1975) zeigt bereits für Jahresdaten

²⁰ Das Beispiel unterstellt 6 Prozent effektive Jahresrendite und nachschüssige Monatsraten; Anlegerin A lässt ihr Kapital ab dem 35. Lebensjahr ohne weitere Einzahlungen wachsen.

des S&P Composite 1934 bis 1972, dass sich Timing erst ab einer Prognosegenauigkeit von rund 74 Prozent lohnt — eine Schwelle, die kaum ein Prognostiker dauerhaft erreicht.²¹

Estrada (2008) verschärft den Befund auf Tagesebene: Über 15 entwickelte Aktienmärkte hinweg hätte das Verpassen der nur zehn besten Handelstage das Endvermögen im Durchschnitt um 50,8 Prozent reduziert; für den Dow Jones 1900 bis 2006 beträgt der Verlust 65 Prozent. Die besten Tage folgen zudem häufig unmittelbar auf die schlechtesten, sodass der Ausstieg im Abschwung fast zwangsläufig die Erholung verpasst. Die Verteilung der Tagesrenditen ist randlastig: Wenige Extremwerte im Sinne von Taleb (2007) tragen den Zinseszins des gesamten Marktes.

Theoretisch fundiert wird die Skepsis durch die Markteffizienzhypothese: Sind Kurse informationseffizient, folgen sie näherungsweise einem Martingal, und systematisch profitable Timing-Signale dürften nicht existieren (Fama, 1970). Die Timing-Frage ist damit keine Frage des Fleißes, sondern der Informationsverarbeitung des Marktes selbst; die nachfolgende Evidenz zeigt, dass sich diese theoretische Vermutung im beobachteten Anlegerverhalten bestätigt.

Der Vollständigkeit halber ist festzuhalten, dass die Literatur eine begrenzte Prognostizierbarkeit langfristiger Renditen dokumentiert: Bewertungskennzahlen wie das Dividenden-Kurs-Verhältnis erklären einen Teil der Renditevariation über Horizonte von Jahren bis Dekaden (Campbell und Shiller, 1988). Für das Timing auf Sicht von Tagen bis Monaten folgt daraus jedoch wenig — die Prognosekraft ist zu schwach und zu langsam, um die Schwelle von Sharpe (1975) zu erreichen, und ihre Nutzung verlangt ihrerseits lange, ununterbrochene Halteperioden.

Für den Sparplananleger stellt sich die Timing-Frage in milderer Form — als Frage nach dem Einstiegszeitpunkt der nächsten Rate. Auch hier gilt die Arithmetik der Unterbrechung: Das Aussetzen von Raten in Erwartung günstigerer Kurse tauscht einen sicheren Zeitgewinn gegen eine unsichere Kursersparnis, und die Konzentration der besten Handelstage macht diesen Tausch im Erwartungswert nachteilig. Der automatische, niveaunabhängige Einstieg des Sparplans ist insofern nicht nur eine Disziplinierungstechnik (Abschnitt 6.2), sondern zugleich die konsequente Antwort auf die Timing-Evidenz dieses Abschnitts.

10.2 Empirische Evidenz zum Anlegerverhalten

Die verhaltensbezogene Evidenz bestätigt die Arithmetik. Barber und Odean (2000) zeigen, dass die aktivsten Privatanleger nach Kosten 11,4 Prozent pro Jahr erzielten, während der Markt 17,9 Prozent bot — Handelsaktivität ist im Aggregat renditeschädlich. Dichev (2007) misst kapitalgewichtete Anlegerrenditen, die die Wirkung der gewählten Ein- und Ausstiegszeitpunkte einschließen, und findet sie an NYSE und AMEX um rund 1,3

²¹ In Estrada (2008) entsprechen die zehn besten Tage weniger als 0,1 Prozent aller betrachteten Handelstage.

Prozentpunkte pro Jahr niedriger als die zeitgewichteten Buy-and-Hold-Renditen. Jeffrey (1984) betont die Asymmetrie des Timings: Das Aufwärtspotenzial des perfekten Ausstiegs ist begrenzt, das Abwärtsrisiko des verpassten Aufschwungs nicht. Bessembinder (2018) schließlich zeigt, dass nur rund 4 Prozent aller US-Aktien den gesamten Nettovermögenszuwachs gegenüber Treasury Bills seit 1926 erzeugten — die Erträge sind nicht nur über Tage, sondern auch über Titel extrem konzentriert, sodass selektives und sporadisches Investieren die wenigen Träger des Zinseszinses mit hoher Wahrscheinlichkeit verfehlt.²²

Auch auf Fondsebene bestätigt sich das Muster: Friesen und Sapp (2007) beziffern die Timing-Kosten der Mittelbewegungen in US-Aktienfonds auf rund 1,6 Prozentpunkte pro Jahr — Anleger kaufen nach Kursanstiegen und verkaufen nach Rückgängen, wodurch ihre kapitalgewichtete Rendite die Fondsrendite systematisch verfehlt. Tabelle 10 fasst die Evidenz zusammen.

Tabelle 10: Empirische Evidenz zu Market Timing und Handelsaktivität

Studie	Markt und Zeitraum	Zentraler Befund
Sharpe (1975)	USA, S&P Composite 1934-1972	Timing lohnt erst ab ca. 74 % Prognosegenauigkeit
Jeffrey (1984)	USA, S&P 500 1926-1982	Asymmetrie: verpasste Aufschwünge wiegen schwerer als vermiedene Abschwünge
Barber und Odean (2000)	USA, 66.465 Depots 1991-1996	Aktivste Händler 11,4 % p. a. vs. 17,9 % Marktrendite
Dichev (2007)	NYSE/AMEX 1926-2002	Kapitalgewichtete Renditen ca. 1,3 pp p. a. unter Buy-and-Hold
Estrada (2008)	15 Industrieländer; Dow 1900- 2006	10 beste Tage verpasst: –50,8 % (Dow: –65 %) Endvermögen
Bessembinder (2018)	USA, alle Aktien 1926-2016	4 % der Aktien erzeugen den gesamten Nettovermögenszuwachs

Quelle: Eigene Zusammenstellung auf Basis der Studien (Sharpe, 1975; Jeffrey, 1984; Barber und Odean, 2000; Dichev, 2007; Friesen und Sapp, 2007; Bessembinder, 2018).

Für den Privatanleger folgt daraus keine Resignation, sondern eine Arbeitsteilung: Die Rendite liefert der Markt, die Verstärkung liefert die Zeit, und die Aufgabe des Anlegers besteht darin, beide Wirkungen nicht zu unterbrechen. Zeit im Markt ersetzt die unbeantwortbare Frage nach dem richtigen Zeitpunkt durch die beantwortbare Frage nach der richtigen Haltedauer — und verbindet damit die Psychologie aus Abschnitt 8, die Sparplanmathematik aus Abschnitt 9 und die Timing-Evidenz dieses Abschnitts zu einer einzigen Handlungsregel: früh beginnen, automatisch fortsetzen, investiert bleiben.

Für die Portfoliokonstruktion heißt das nicht, dass jede aktive Entscheidung obsolet wäre — wohl aber, dass die Kapitalbindung selbst nicht zur Disposition stehen sollte. Ein breit diversifizierter, kostengünstiger Kern, der dauerhaft investiert bleibt, sichert die

²² Barber und Odean (2000) untersuchen 66.465 Haushaltsdepots eines großen US-Discount-Brokers der Jahre 1991 bis 1996.

Teilhabe an den wenigen Tagen und Titeln, die den Zinseszins des Marktes tragen; taktische Positionen werden auf einen Satellitenanteil begrenzt, dessen Fehlschläge das Kernvermögen nicht unterbrechen können. So bleibt der Ehrgeiz des Anlegers erhalten — und die Wirkungsmacht des Zinseszinses unangetastet.

11 Fazit und Handlungsempfehlungen

Die Wirkungsmacht des Zinseszinses ist das Ergebnis dreier multiplikativ verbundener Größen: Rendite, Zeit und Wiederanlagequote. Die durchgerechneten Beispiele beziffern ihren Beitrag — der Verzicht auf die Wiederanlage von Ausschüttungen kostet im 20-Jahres-Beispiel 21,1 Prozent des Gesamtvermögens, bei der zehnjährigen Kuponanleihe stammt je nach Wiederanlagezins bis zu ein Viertel des Zinsertrags aus dem Zins auf den Zins, und die Volatilität entzieht dem Wachstum gemäß $g \approx \mu - \sigma^2/2$ einen unmittelbar bezifferbaren Teil. Die Zinsusancen verschieben Zinsbeträge um bis zu 1,4 Prozent je Periode und machen den effektiven Jahreszins zur einzig belastbaren Vergleichsgröße. Die Verhaltensökonomie erklärt zugleich, weshalb diese Wirkung häufig ungenutzt bleibt: Der Exponential Growth Bias lässt den flachen Anfang der Kurve enttäuschend erscheinen, die Gegenwartsverzerrung verschiebt den Sparbeginn, und Market Timing unterbricht die Verkettung der Wachstumsfaktoren an ihren wirkungsvollsten Stellen; im Zwei-Sparer-Vergleich erreicht die früh beginnende Anlegerin mit einem Drittel der Einzahlungen 96 Prozent des Endvermögens des später beginnenden Anlegers.²³

Für durchschnittlich versierte Privatanleger verdichten sich die Befunde zu sieben Empfehlungen: erstens früh beginnen, weil die Konvexität der Zeit die letzten Jahre des Horizons zu den ertragreichsten macht und der Faktor Zeit den Zinssatz als Hebel dominiert; zweitens Erträge konsequent wieder anlegen — thesaurierende Vehikel automatisieren dies; drittens Kosten und Steuern minimieren, da sie denselben Zinseszinsmechanismus gegen den Anleger wenden; viertens beim Vergleich von Zinsangeboten stets auf effektive Jahreszinsen und einheitliche Usancen achten; fünftens die Volatilität durch Diversifikation und Rebalancing kontrollieren, weil sie die geometrische Wachstumsrate unmittelbar erhöht; sechstens das Sparen automatisieren, um Exponential Growth Bias und Gegenwartsverzerrung zu umgehen; siebtens investiert bleiben, denn Zeit im Markt schlägt Market Timing.

Jenseits der individuellen Ebene haben die Befunde eine bildungspolitische Dimension: Finanzielle Grundbildung — insbesondere das Verständnis des Zinseszinses — gehört zu den robustesten Prädiktoren von Vorsorgeverhalten und Vermögensaufbau (Lusardi und Mitchell, 2014). Eine Arbeit, die die Wirkungsmacht des Zinseszinses vermisst, ist insofern zugleich ein Argument dafür, diese Wirkungsmacht zum Gegenstand von Schulcurricula

²³ Diese Arbeit dient ausschließlich Informations- und Ausbildungszwecken; sie stellt keine Anlageempfehlung dar.

und Anlegerkommunikation zu machen: Die Rendite von Finanzbildung ist — wie das Kapital, auf das sie wirkt — exponentiell.

Derselbe Mechanismus begründet die Kostendisziplin: Laufende Gebühren wirken als negativer Zinseszins. Ein Prozentpunkt jährlicher Kosten reduziert bei 7 Prozent Bruttorendite das Endvermögen über 30 Jahre um rund ein Viertel — nicht, weil ein Prozent viel wäre, sondern weil er in jeder einzelnen Periode der Wachstumsbasis entzogen wird und damit alle künftigen Erträge auf sich selbst mitverliert. Die Kostenquote eines Anlageprodukts ist deshalb neben Sparrate, Rendite und Zeit der vierte Parameter der Endwertgleichung.

Die Grenzen der Analyse liegen in ihrer Vereinfachung: konstante Renditen, keine Steuern und Kosten, hypothetische Beispiele. Künftige Arbeiten könnten die Ergebnisse um stochastische Simulationen der Endvermögensverteilung, die Wirkung länderspezifischer Besteuerung sowie die Entsparphase erweitern, in der der Zinseszins mit umgekehrtem Vorzeichen auf Entnahmepläne wirkt (Sequence-of>Returns-Risiko).

Am Ende ist das titelgebende Bild zu präzisieren: Die Wirkungsmacht des Zinseszinses ist keine Naturgewalt, die über den Anleger kommt, sondern eine Kraft, die er einspannt oder verschenkt. Sie verlangt keine Prognosefähigkeit, kein überlegenes Wissen und kein Talent — nur einen frühen Beginn, einen automatisierten Prozess und die Bereitschaft, ihn über Jahrzehnte nicht zu unterbrechen. Dass genau diese drei Anforderungen der menschlichen Psychologie am schwersten fallen, ist der zentrale Befund dieser Arbeit — und der Grund, warum ihr Verständnis selbst eine Investition mit exponentieller Rendite ist.

Literaturverzeichnis

- Almenberg, J., und C. Gerdes (2012): Exponential Growth Bias and Financial Literacy, *Applied Economics Letters* 19 (17), 1693–1696.
- Barber, B. M., und T. Odean (2000): Trading Is Hazardous to Your Wealth: The Common Stock Investment Performance of Individual Investors, *Journal of Finance* 55 (2), 773–806.
- Benartzi, S., und R. H. Thaler (1995): Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle, *Quarterly Journal of Economics* 110 (1), 73–92.
- Bessembinder, H. (2018): Do Stocks Outperform Treasury Bills? *Journal of Financial Economics*, 129(3), 440–457.
- Black, F., und M. Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* 81 (3), 637–654.
- Bodie, Z. (1995): On the Risk of Stocks in the Long Run, *Financial Analysts Journal* 51 (3), 18–22.
- Böhm-Bawerk, E. von (1889): *Positive Theorie des Capitaless*, Innsbruck: Wagner.
- Booth, D. G., und E. F. Fama (1992): Diversification Returns and Asset Contributions, *Financial Analysts Journal* 48 (3), 26–32.
- Campbell, J. Y., und R. J. Shiller (1988): The Dividend-Price Ratio and Expectations of Future Dividends and Discount Factors, *Review of Financial Studies* 1 (3), 195–228.
- Christandl, F., und D. Fetchenhauer (2009): How Laypeople and Experts Misperceive the Effect of Economic Growth, *Journal of Economic Psychology* 30 (3), 381–392.
- Constantinides, G. M. (1979): A Note on the Suboptimality of Dollar-Cost Averaging as an Investment Policy, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 14 (2), 443–450.
- Dichev, I. D. (2007): What Are Stock Investors' Actual Historical Returns? Evidence from Dollar-Weighted Returns, *American Economic Review* 97 (1), 386–401.
- Dimson, E., P. Marsh und M. Staunton (2002): *Triumph of the Optimists: 101 Years of Global Investment Returns*, Princeton: Princeton University Press.
- Estrada, J. (2008): Black Swans and Market Timing: How Not to Generate Alpha, *Journal of Investing* 17 (3), 20–34.
- Euler, L. (1748): *Introductio in Analysin Infinitorum*, Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet.
- Fama, E. F. (1970): Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, *Journal of Finance* 25 (2), 383–417.
- Fernholz, R., und B. Shay (1982): Stochastic Portfolio Theory and Stock Market Equilibrium, *Journal of Finance* 37 (2), 615–624.
- Fisher, I. (1930): *The Theory of Interest*, New York: Macmillan.

- Fisher, L., und R. L. Weil (1971): Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies, *Journal of Business* 44 (4), 408–431.
- Foltice, B., und T. Langer (2018): Exponential Growth Bias Matters: Evidence and Implications for Financial Decision Making of College Students in the U.S.A, *Journal of Behavioral and Experimental Finance*, 19, 56–63.
- Frederick, S., G. Loewenstein und T. O'Donoghue (2002): Time Discounting and Time Preference: A Critical Review, *Journal of Economic Literature* 40 (2), 351–401.
- Friesen, G. C., und T. R. A. Sapp (2007): Mutual Fund Flows and Investor Returns: An Empirical Examination of Fund Investor Timing Ability, *Journal of Banking & Finance* 31 (9), 2796–2816.
- Goetzmann, W. N. (2004): Fibonacci and the Financial Revolution, NBER Working Paper No. 10352. Cambridge, MA: National Bureau of Economic Research.
- Gordon, M. J., und E. Shapiro (1956): Capital Equipment Analysis: The Required Rate of Return, *Management Science* 3 (1), 102–110.
- Hirshleifer, J. (1958): On the Theory of Optimal Investment Decision, *Journal of Political Economy* 66 (4), 329–352.
- Homer, S., und M. L. Leibowitz (1972): *Inside the Yield Book: The Classic That Created the Science of Bond Analysis*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Homer, S., und R. Sylla (2005): *A History of Interest Rates*. 4. Aufl, Hoboken: Wiley.
- International Swaps and Derivatives Association (ISDA) (2006): *2006 ISDA Definitions*, New York: ISDA.
- Jeffrey, R. H. (1984): The Folly of Stock Market Timing, *Harvard Business Review* 62 (4), 102–110.
- Kahneman, D. (2011): *Thinking, Fast and Slow*, New York: Farrar, Straus and Giroux.
- Kelly, J. L. (1956): A New Interpretation of Information Rate, *Bell System Technical Journal* 35 (4), 917–926.
- Laibson, D. (1997): Golden Eggs and Hyperbolic Discounting, *Quarterly Journal of Economics* 112 (2), 443–477.
- Lammers, J., J. Crusius und A. Gast (2020): Correcting Misperceptions of Exponential Coronavirus Growth Increases Support for Social Distancing, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 117 (28), 16264–16266.
- Latané, H. A. (1959): Criteria for Choice Among Risky Ventures, *Journal of Political Economy* 67 (2), 144–155.
- Levy, M., und J. Tasoff (2016): Exponential-Growth Bias and Lifecycle Consumption, *Journal of the European Economic Association* 14 (3), 545–583.
- Lusardi, A., und O. S. Mitchell (2014): The Economic Importance of Financial Literacy: Theory and Evidence, *Journal of Economic Literature* 52 (1), 5–44.

- Macaulay, F. R. (1938): Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856. New York: NBER.
- Madrian, B. C., und D. F. Shea (2001): The Power of Suggestion: Inertia in 401(k) Participation and Savings Behavior, *Quarterly Journal of Economics* 116 (4), 1149–1187.
- Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection, *Journal of Finance* 7 (1), 77–91.
- McClure, S. M., D. I. Laibson, G. Loewenstein und J. D. Cohen (2004): Separate Neural Systems Value Immediate and Delayed Monetary Rewards, *Science* 306 (5695), 503–507.
- McKenzie, C. R. M., und M. J. Liersch (2011): Misunderstanding Savings Growth: Implications for Retirement Savings Behavior, *Journal of Marketing Research*, 48(SPL), S1-S13.
- Merton, R. C. (1969): Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, *Review of Economics and Statistics* 51 (3), 247–257.
- Messmore, T. E. (1995): Variance Drain, *Journal of Portfolio Management* 21 (4), 104–110.
- Pacioli, L. (1494): *Summa De Arithmetica, Geometria, Proportioni Et Proportionalita*, Venedig: Paganino Paganini.
- Samuelson, P. A. (1963): Risk and Uncertainty: A Fallacy of Large Numbers, *Scientia*, 98, 108–113.
- Samuelson, P. A. (1969): Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, *Review of Economics and Statistics* 51 (3), 239–246.
- Sharpe, W. F. (1975): Likely Gains from Market Timing, *Financial Analysts Journal* 31 (2), 60–69.
- Shefrin, H. M., und M. Statman (1984): Explaining Investor Preference for Cash Dividends, *Journal of Financial Economics* 13 (2), 253–282.
- Siegel, J. J. (2002): *Stocks for the Long Run*. 3. Aufl, New York: McGraw-Hill.
- Stango, V., und J. Zinman (2009): Exponential Growth Bias and Household Finance, *Journal of Finance* 64 (6), 2807–2849.
- Statman, M. (1995): A Behavioral Framework for Dollar-Cost Averaging, *Journal of Portfolio Management* 22 (1), 70–78.
- Taleb, N. N. (2007): *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*, New York: Random House.
- Thaler, R. H., und S. Benartzi (2004): Save More Tomorrow: Using Behavioral Economics to Increase Employee Saving, *Journal of Political Economy*, 112(S1), S164-S187.
- Wagenaar, W. A., und S. D. Sagaria (1975): Misperception of Exponential Growth, *Perception & Psychophysics* 18 (6), 416–422.
- Wagenaar, W. A., und H. Timmers (1979): The Pond-And-Duckweed Problem: Three Experiments on the Misperception of Exponential Growth, *Acta Psychologica* 43 (3), 239–251.

Williams, J. B. (1938): *The Theory of Investment Value*, Cambridge, MA: Harvard University Press.